3 Begriff der Geradenspiegelung

3.1 Schuldefinition

Definition 3.1

Geradenspiegelung, Schuldefinition
Es sei g eine Gerade. Eine Abbildung S_g der Ebene auf sich selbst heißt Spiegelung an g, wenn

(1) jeder Punkt von g auf sich selbst abgebildet wird und

(2) jeder nicht auf g liegende Punkt P derart seinem Bild P' zugeordnet wird, dass g die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{PP'}$ ist.

Zur Erarbeitung dieser Definition s. `https://youtu.be/WKJ--teASEc`.

3.2 Geradenspiegelung als spezielle Bewegung

Definition 3.2

Geradenspiegelung als Bewegung mit genau einer Fixpunktgeraden
Eine Bewegung mit genau einer Fixpunktgeraden f heißt Spiegelung (an f).

3.3 Äquivalenz von Definition 3.1 und 3.2

Satz 3.1

Def. 3.1 ⇒ Def. 3.2
Aus Definition 3.1 folgt Definition 3.2.

3.3.1 Beweis von Satz 3.1

Es sei S_g eine Geradenspiegelung entsprechend Definition 3.1. Wir haben zu zeigen, dass S_g

(1) eine Bewegung ist,

(2) die genau eine Fixpuktgerade hat.

Punkt (2) beinhaltet zwei Nachweise:

1.) S_g hat eine Fixpunkterade und

2.) S_g hat nicht mehr als eine Fixpunktgerade.

Punkt 1.) ist klar nach Definition 3.1. Für Punkt 2.) beweisen wir zunächst den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 3.1

Drei nichtkollineare Punkte bestimmen id.
Wenn bei einer Bewegung drei nichtkollineare Punkte auf sich selbst abgebildet werden, dann ist diese Bewegung die Identität id.

Beweis des Hilfssatzes:
Wir haben bereits bewiesen, dass durch drei nichtkollineare Punkte und deren Bilder jede Bewegung eindeutig bestimmt ist. Wenn die drei Punkte nun Fixpunkte sind, kann die Bewegung nur noch die Identität sein.
Wir nehmen an, dass es außer der Geraden g noch eine weitere von g verschiedene Gerade Fixpunktgerade bzgl. S_g ist. Diese Gerade muss nun einen Fixpunkt bzgl. S_g beinhalten, der bzgl. zweier verschiedener Punkte von g nicht kollinear ist. Damit wäre nach dem Hilfssatz S_g die Identität. Da jeder Punkt außerhalb von g durch S_g nicht auf sich selbst abgebildet wird, kann S_g nicht die Identität sein.
Der Beweis von Punkt (1):
Es ist zu zeigen, dass S_g abstandserhaltend ist.
Es seien P und Q zwei Punkte und P' und Q' deren Bilder bei S_g. Es ist zu zeigen, dass $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$ ist. Es sind vier Fälle zu unterscheiden:

(I) $P \in g \wedge Q \in g$

(II) $(P \notin g \wedge Q \in g) \vee (P \in g \wedge Q \notin g)$

(III) Der Fall $P \notin g \wedge Q \notin g$ spaltet sich in wiederum zwei Fälle:

a) $\overline{PQ} \cap g \neq \emptyset$
b) $\overline{PQ} \cap g = \emptyset$

Die Beweise:

- Fall (I): trivial

- Fall (II):
  Sei P kein Punkt der Spiegelgeraden g während Q zu g gehört. Weil g nach Definition 3.1 die Mittelsenkrechte von $\overline{PP'}$ ist und Q zu g gehört sind die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{P'Q}$ kongruent zueinander.

- Fall (III) a):
  Sei S der Schnittpunkt von $\overline{PQ}$ mit g. Wie im vorangegangenen Fall gilt $\overline{PS} \cong \overline{P'S} \wedge \overline{QS} \cong \overline{Q'S} \ldots$.

- Fall (III) b): Übungsaufgabe

Aufgabe 3.1

Beweis des Falles (III) b)
Beweisen Sie Fall (III) b).

Jede Geradenspiegelung im Sinne der Definition 3.1 ist damit eine abstandserhaltende Abbildung der Ebene auf sich mit genau einer Fixpunktgeraden.

Satz 3.2

Def. 3.2 $\Rightarrow$ Def. 3.1
Jede abstandserhaltende Abbildung der Ebene auf sich mit genau einer Fixpunktgeraden ist eine Geradenspiegelung im Sinne von Definition 3.1.

Beweis von Satz 3.2:
Es sei φ eine abstandserhaltende Abbildung der Ebene auf sich mit genau der Fixpunktgeraden g. Diese gerade übernimmt die Role der Spiegelgeraden entsprechend Definition 3.1. Es bleibt zu zeigen, dass sie die Mittelsenkrechte bezüglich einer jeden Strecke $\overline{PP'}$ mit $P \notin g$ ist. Wegen der Abstandserhaltung von φ und der Eigenschaft von g Fixpunktgerade bzgl. φ zu sein, gilt für jeden Punkt G von $g : \overline{GP} \cong \overline{GP'}$. Nach dem Mittelsenkrechtenkriterium bedeutet das, dass g die Mittelsenkrechte von $\overline{PP'}$ ist.

Aufgabe 3.2

Skizzen
Fertigen Sie Skizzen an, die zu den Beweisen von Satz 3.1 und Satz 3.2 passen und laden Sie diese ins Wiki.