Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 13

(Lösungen)

1. Beweisen Sie folgenden Satz:
   Gegeben sei ein (nicht gestreckter) Winkel $\angle AOB$, es sei $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$ und $P \in \overline{AB}$. Dann ist OP^+ genau dann Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$, wenn P Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist.

Beweis:
Es sind 2 Richtungen zu beweisen.

($\Rightarrow$) Wenn OP^+ Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$ ist, so ist P Mittelpunkt von $\overline{AB}$.

- Die Dreiecke ΔAOP und ΔBOP sind nach Axiom IV/5 kongruent:
  - Da OP^+ Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$ ist, gilt definitionsgemäß $\angle AOP \equiv \angle BOP$;
  - $|OP| = |OP|$;
  - $|OA| = |OB|$ (nach Voraussetzung).
- Somit gilt $|AP| = |BP|$ und wegen $P \in \overline{AB}$ ist P daher Mittelpunkt von $\overline{AB}$.

($\Leftarrow$) Wenn P Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist, so ist OP^+ Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$.

- Falls OP^+ nicht Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$ wäre, so müsste nach dem Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden eine andere Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$ existieren. Diese müsste nach Lemma 1 die Strecke $\overline{AB}$ in einem Punkt schneiden, der mit S bezeichnet sei.
- Nach dem bereits bewiesenen Teil ($\Rightarrow$) folgt daraus, dass S Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist.
- Nach einem in Übungsserie 5 bewiesenen Satz besitzt jede Strecke *genau* einen Mittelpunkt.
- Somit gilt $S = P$ und daher ist OP^+ Winkelhalbierende von $\angle(AOB)$.

Alternativ kann dieser Teil auch über den Kongruenzsatz sss bewiesen werden!

2. Beweisen Sie die Existenz und Eindeutigkeit des Lotes von einem Punkt P auf eine Gerade g: Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt P außerhalb dieser Geraden gibt es *genau* ein Lot.

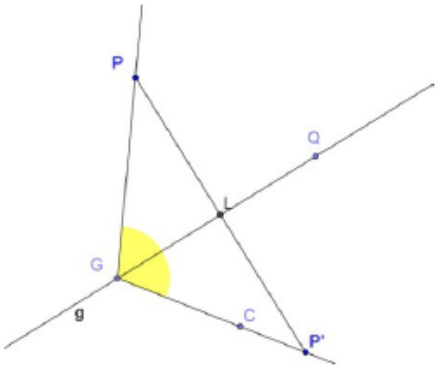
Beweis: Existenz:

Beweis

Auf g existiert ein Punkt G.

Fall I: $PG \perp g$, fertig

Fall II: nicht$(PG \perp g)$



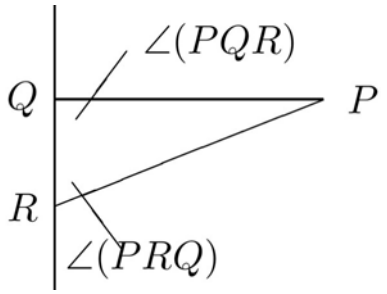
(1)	$\exists PC^+ \subset gP^-$: $\lvert\angle LGP\rvert = \lvert\angle LGC\rvert$	Winkelmaßaxiom, Winkel-konstruktionsaxiom
(2)	$\exists P' \in PC^+$: $\lvert GP'\rvert = \lvert GP\rvert$	Abstandsaxiom, Axiom vom Lineal
(3)	$\exists L: \{L\} = g \cap \overline{PP'}$	P und P' gehören zu verschiedenen Halbebenen bzgl. g
(4)	$\overline{GL} \cong \overline{GL}$	trivial
(5)	$\overline{LGP'} \cong \overline{LGP}$	(1), (2), (4), SWS
(6)	$\angle PLG \cong \angle P'LG$	(5)
(7)	$\lvert\angle PLG\rvert = \lvert\angle P'LG\rvert = 90$	kongruente Nebenwinkel, also rechte Winkel
(8)	$PL \perp g$	(7)

Beweis, Eindeutigkeit:

Annahme: es gebe zwei Lote durch P auf g.

Die Annahme führt sehr schnell zu einem Widerspruch zum schwachen Außenwinkelsatz.

3. Beweisen Sie: Ist g eine Gerade, P ein Punkt, der nicht auf g liegt, und Q der Fußpunkt des Lotes von P auf g, so existiert kein von Q verschiedener Punkt auf g, dessen Abstand von P kleiner oder gleich dem Abstand $|PQ|$ ist.

Beweis:

Es sei R ein beliebiger, von Q verschiedener Punkt auf g. Nach Korollar 1 müssen in jedem Dreieck mindestens 2 der Innenwinkel spitze Winkel sein, somit ist der Winkel $\angle(PRQ)$ ein spitzer und deshalb kleiner als der Winkel $\angle(PQR)$, woraus sich nach der Beziehung „größere Seite – größerer Winkel“ unmittelbar $|PR| > |PQ|$ ergibt.