Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 11 (Lösungen)

1. Beweisen Sie: Das Innere eines beliebigen Dreiecks ist konvex.

Lösung:

Das Innere eines Dreiecks ist der Schnitt dreier Halbebenen. Wir wissen nach einem bekannten Satz, dass eine Halbebene eine konvexe Punktmenge ist. Wir wissen nach einem zweiten bekannten Satz, dass die Schnittmenge zweier konvexer Punktmengen ebenfalls konvex ist. Also ist auch die Schnittmenge zweier Halbebenen eine konvexe Punktmenge. Diese neue konvexe Punktmenge geschnitten mit der dritten Halbebene ist folglich wieder eine konvexe Punktmenge.

2. Definieren Sie den Begriff des Innenwinkels eines Dreiecks.

Gegeben sei ein Dreieck \overline{ABC} . Die Winkel $\angle AB^+AC^+\angle BC^+BA^+$ und $\angle CB^+CA^+$ heißen Innenwinkel des Dreiecks \overline{ABC} .

3. Beweisen Sie: Wenn α und β zwei Scheitelwinkel sind, dann haben α und β dieselbe Größe.

Es sei $\alpha = \langle p^+ q^+ \text{ und damit } \beta = \langle p^- q^- \text{ der Scheitelwinkel von } \alpha$. Der Winkel $\gamma = \langle q^+ p^- \text{ ist dann Nebenwinkel sowohl von } \alpha$ als auch von β . Nach Axiom IV/4 gelten die folgenden beiden Gleichungen: $|\alpha| + |\gamma| = 180$, $|\beta| + |\gamma| = 180$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt unmittelbar $|\alpha| = |\beta|$, was letztlich zu beweisen war.

4. Wir setzten voraus, dass wir Geometrie in einer Ebene betreiben. Gegeben seien eine Gerade und ein Punkt auf dieser Geraden. Beweisen Sie, dass es genau eine Senkrechte zu dieser Geraden gibt, die durch den gegebenen Punkt geht.

Lösung:

Es sei g eine Gerade und P ein Punkt auf g. Q sei ein Punkt, der nicht zu g gehört. A sei ein weiterer Punkt, der zu g gehört.

Existenz und Eindeutigkeit der Senkrechten s zu g durch den Punkt P:

Wir betrachten die Halbebene gQ^+ . Nach dem Winkelkonstruktionsaxiom gibt es jetzt in gQ^+ genau einen Strahl h mit dem Anfangspunkt P derart, dass $|\angle PA^+h| = 90$ gilt. Die Gerade, die durch h und seinen entgegengesetzten Strahl gebildet wird, ist die gesuchte Senkrechte s. Ihre Eindeutigkeit ergibt sich aus der Eindeutigkeit des Strahls h.