Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 8

(Lösungen)

1. Beweisen Sie: Halbebenen sind konvexe Punktmengen.

Voraussetzung: Halbebene gP^+
Behauptung: gP^+ ist konvex
Beweis:

Nr.	Beweisschritt	Begründung
1	Q sei ein beliebiger weiterer Punkt, der mit P in der Halbebene gP^+ liegt.	
2	*Es gilt:* $\overline{QP} \cap g = \{\}$	Def. Halbebene
3	$\forall R \in \overline{QP} : \overline{RP} \cap g = \{\}$	2
4	Alle Punkte auf der Strecke $\overline{QP}$ gehören zur Halbebene gP^+	3
5	gP^+ ist konvex	4

2. Beweisen Sie: Das Innere eines Winkels ist konvex.

Lösung: *Voraussetzung:* R und Q seien zwei Punkte im Inneren des Winkels $\angle ASB$.
Behauptung: $\overline{RQ}$ liegt vollständig im Inneren des Winkels $\angle ASB$.

Beweis: siehe vervollständigte Tabelle.

Beweisschritt	Begründung
1. Punkte R und Q liegen im Inneren des Winkels $\angle ASB$	Nach Vorraussetzung.
2. $R \in ASB^+$ und $Q \in ASB^+$	Definition des Inneren eines Winkels (Schnittmengen von Halbebenen)
3. $\overline{RQ} \subset ASB^+$	Halbebenen sind konvex
4. $R \in BSA^+$ $Q \in BSA^+$	Definition des Inneren eines Winkels
5. $\overline{RQ} \subset BSA^+$	Halbebenen sind konvex
6. $\overline{RQ} \subset ASB^+ \cap BSA^+$	Aus 3. und 5.
7. $\overline{RQ}$ liegt im Inneren des Winkels $\angle ASB$.	Definition des Inneren eines Winkels.

3. Beweisen Sie: Jeder Winkel besitzt genau eine Winkelhalbierende.

Lösung:

(a) **Existenz der Winkelhalbierenden:** Gegeben sei ein beliebiger Winkel $\angle ASB$. Es ist zu zeigen, dass es einen Strahl SP^+ gibt, so dass $|\angle SA^+SP^+| + |\angle SP^+SB^+| = |\angle ASB|$ und $|\angle AS^+SP^+| = |\angle SP^+SB^+|$ gilt. Nach Axiom W1 ist $|\angle ASB|$ eine reelle Zahl zwischen 0 und 180. Demzufolge ist $\frac{|\angle ASB|}{2}$ ebenfalls eine reelle Zahl zwischen 0 und 180. Axiom W2 liefert uns in der Halbebene ASB^+ einen Strahl SP^+ so, dass $|\angle SA^+SP^+| = \frac{|\angle ASB|}{2}$ gilt. Wenn wir zeigen könnten, dass der Punkt P im Inneren des Winkels liegt, wären wir im Prinzip fertig. Dann würde nämlich

nach Axiom W3 $|\angle AS^+SP^+| + |\angle SP^+SB^+| = |\angle ASB|$ folgen. Unter Berücksichtigung von $|\angle SA^+SP^+| = \frac{|\angle ASB|}{2}$, wäre dann auch $|\angle SP^+SB^+| = \frac{|\angle ASB|}{2}$ und somit $|\angle SA^+SP^+| = |\angle SP^+SB^+|$.

Um zu zeigen, dass P ein Punkt im Inneren ist, führen wir den Beweis indirekt. Wir nehmen also an, dass der Punkt P nicht im Inneren des Winkels $\angle ASB$ liegt. In diesem Fall wäre der Punkt B ein Punkt im Inneren des Winkels $\angle ASP$. Nach Satz „Gegeben seien drei Strahlen p, q und r, die in ein und derselben Ebene liegen und den gemeinsamen Anfangspunkt S haben. Wenn der Strahl r innerhalb des Winkels $\angle pq$ liegt, dann sind die Winkel $\angle pr$ und $\angle rq$ kleiner als der Winkel $\angle pq$." müsste jetzt $|\angle ASB| < |\angle ASP|$ sein. Das ist jedoch ein Widerspruch zu $|\angle ASP| = \frac{|\angle ASB|}{2} < |\angle ASB|$. Die Annahme, dass P nicht im Inneren des Winkels $\angle ASB$ liegt, ist also zu verwerfen. Die Existenz der Winkelhalbierenden zu einem beliebigen Winkel ist somit gezeigt.

(b) **Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden:** Um die Eindeutigkeit der Winkelhalbierende zu zeigen, nehmen wir an, dass zu einem Winkel $\angle pq$ zwei verschiedene Winkelhalbierende w_1 und w_2 existieren. Die Winkel $\angle pw_1$ und $\angle pw_2$ hätten dann das gleiche Maß und zwar $\frac{|\angle pq|}{2}$. Nach Axiom W2 können die beiden Strahlen w_1 und w_2 nicht verschieden sein. Also ist unsere Annahme zu verwerfen. Die Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden ist somit bewiesen.

4. Entwickeln Sie ein Kriterium dafür, dass ein Viereck konvex ist.

LÖSUNG:

Ein Viereck $A_1A_2A_3A_4$ ist konvex, falls für zwei beliebige benachbarte Punkte A_iA_{i+1} ($i = 1...4$; für $i = 4$ wird $i + 1 = 1 \equiv 5 \bmod 4$ gesetzt) die beiden jeweils anderen Punkte in derselben Halbebene bezüglich A_iA_{i+1} liegen.

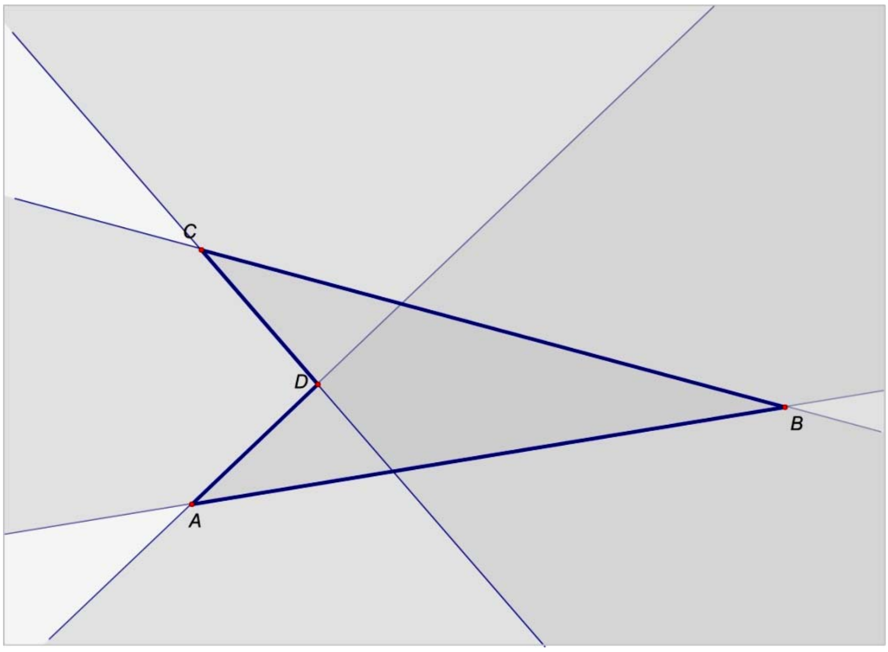
5. Definieren Sie das „Innere eines Vierecks $ABCD$". Beachten Sie, dass dabei sowohl konvexe als auch nichtkonvexe Vierecke erfasst werden sollen.

LÖSUNG:

1. Versuch einer Definition (Inneres eines Vierecks):

Das Innere eines Vierecks $\overline{ABCD}$ ist die Schnittmenge der folgenden Halbebenen: $ABC^+, BCD^+, CDA^+, DAB^+$.

Diese Definition liefert nur für konvexe Vierecke das, was wir als Inneres eines Vierecks verstehen wollen. Die folgende Abbildung wendet die Definition auf ein nicht konvexes Viereck an:



Zur Generierung der Abbildung wurden die grafischen Darstellungen der Halbebenen $ABC^+, BCD^+, CDA^+, DAB^+$ in verschiedene aufeinanderliegende Ebenen des Grafiksystems gelegt und mit einer Transparenz von 40% ausgestattet. Das, was wir eigentlich unter dem Inneren des Vierecks $\overline{ABCD}$ verstehen wollen, müsste jetzt einheitlich in ein und derselben Helligkeit eingefärbt sein. Wie wir sehen ist dem nicht so. Deshalb: „Teile und Herrsche!" Wir zerlegen das Viereck in zwei Teildreiecke und vereinigen das Innere dieser beiden Teildreiecke.

Definition (Inneres eines Vierecks):

Unter dem Inneren eines Vierecks $\overline{ABCD}$ versteht man die Vereinigungsmenge der beiden Punktmengen, die jeweils das Innere der folgenden beiden Dreiecke bilden:

- $\overline{ABC}$ und $\overline{ACD}$, falls die Punktmengen, die das jeweils Innere dieser beiden Dreiecke (ohne die Dreieckseiten) bilden, disjunkt sind,
- $\overline{ABD}$ und $\overline{BCD}$ sonst.