PH Heidelberg, Fach Mathematik, Klausur zur Teilprüfung Modul 2, Einführung in die Geometrie, SS2010, 30.07.2010

Name: Vorname: Matrikelnr.:

Aufgabe 1: Multiple Choice Test

Kennzeichnen Sie die Ihrer Meinung nach richtigen Antworten. Es ist möglich, dass mehrere Antworten richtig sind.

a) In welchen Fällen handelt es sich um eine Äquivalenzrelation?

Aus dem Kreuzprodukt der Menge aller Punkte mit der Menge aller Strecken werden alle die Paare (Punkt, Strecke) ausgewählt, für die gilt: Der Punkt ist der *Mittelpunkt* der Strecke.		
Relation der *Identität* auf der Menge aller Punkte	×	
Relation *kürzer* auf der Menge aller Streckenlängen		
Relation *eine Gerade ist windschief zu einer zweiten Geraden* auf der Menge aller Geraden		

b) Welche der folgenden Mengen ist in jedem Fall konvex?

das Innere eines Vierecks		
der Schnitt zweier Geraden	×	
die Vereinigungsmenge zweier Geraden		
eine Ebene	×	

c) Es seien a und b zwei nichtidentische Geraden, die durch eine dritte Gerade c jeweils in genau einem Punkt geschnitten werden. Bei diesem Schnitt mögen die Stufenwinkel α und β entstehen. Welche der folgenden Aussagen ist der Stufenwinkelsatz bzw. eine zu diesem Satz äquivalente Aussage.

$a \parallel b \Rightarrow \alpha \cong \beta$	×	
$\alpha \parallel \beta \Longrightarrow a \cong b$		
$\alpha \ncong \beta \Rightarrow \exists S: S \in a \wedge S \in b$	×	
$\alpha \cong \beta \Leftrightarrow a \parallel b$		

d) Welche der folgenden Aussagen lassen sich bereits in der absoluten Geometrie beweisen?

Es existieren rechtwinklige Dreiecke.	×	
In jedem Viereck beträgt die Summe der Größen der Innenwinkel 360°.		
Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist so groß, wie die beiden nichtanliegenden Innenwinkel dieses Dreiecks.		
Jedes Dreieck hat zwei spitze Innenwinkel.	×	

e) In welchen Fällen handelt es sich um eine korrekte Definition des Begriffs Parallelogramm?

Wenn sich in einem Viereck die Diagonalen halbieren, so ist das Viereck ein Parallelogramm.	×	
Wenn in einem Drachen die gegenüberliegenden Seiten kongruent zueinander sind, so ist der Drachen ein Parallelogramm.		
Es gibt Trapeze, die ein weiteres Paar paralleler Seiten haben und die Parallelogramme genannt werden.		
Trapeze mit zwei zueinander kongruenten Seiten heißen Parallelogramme.		

f) Welche der folgenden Aussagen sind in der Euklidischen Geometrie wahr?

In jedem Dreieck ist die Summe der Größen der Innenwinkel kleiner oder gleich 180°.	×	
Es gibt Dreiecke mit einem Umkreis, welcher dann eindeutig bestimmt ist.	×	
Es gibt Dreiecke, für die der Inkreis und der Umkreis identisch sind.		
Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn der Mittelpunkt seines Umkreises im Inneren des Dreiecks liegt.		

g) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Die Zerlegung einer Ebene in zwei geschlossene Halbebenen ist eine Klasseneinteilung dieser Ebene.		
Das Axiom vom Abstand sichert uns die Existenz von Strecken der Länge $\sqrt{2}$.		
Das Winkelkonstruktionsaxiom sichert die Existenz von Winkeln mit der Größe 90.	×	
Das Axiom vom Lineal liefert Punktepaare, deren Abstand $0{,}5 \cdot \left(1+\sqrt{5}\right)$ ist.	×	

Insgesamt zu erreichende Punktzahl für Aufgabe 1: 7

erreichte Punktzahl:

Name: Vorname: Matrikelnr.:

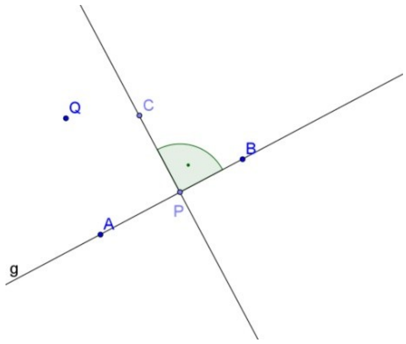
Aufgabe 2: (Lot, Lotgerade, ein wenig Axiomatik)

In der Ebene ε seien die Gerade g und der Punkt P gegeben.

Hinweis: Für die folgenden Beweisführungen ist es sinnvoll, weitere Punkte der Ebene ε zu verwenden. Sie brauchen die Existenz dieser Hilfspunkte nicht weiter zu begründen. Zur Beschreibung der Lage der von Ihnen verwendeten Hilfspunkte sind Skizzen ausreichend.

a) Fall 1: $P \in g$

Beweisen Sie: Es existiert eine Gerade l mit: $P \in l \wedge l \perp g$.



(1)	$\exists PC^+ \subset gQ^+$: $\lvert\angle BPC\rvert = 90$	Winkel-konstruktionsaxiom	4
(2)	$PC \perp g$	(1), Definition „senkrecht“	

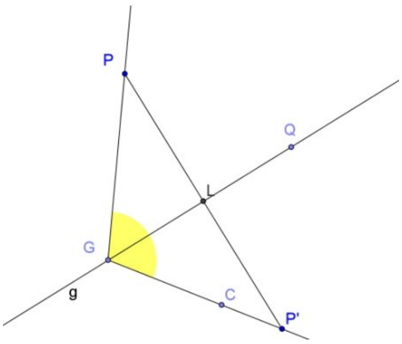
b) Fall 2: $P \notin g$

Beweisen Sie: Es existiert eine Gerade l mit: $P \in l \wedge l \perp g$.

Auf g existiert ein Punkt G.

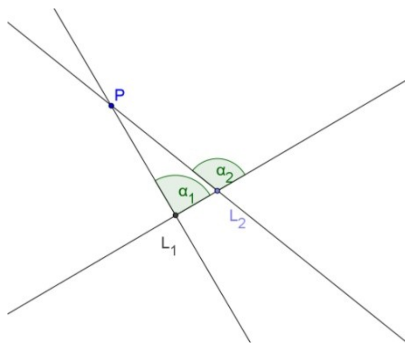
Fall I: $PG \perp g$, fertig

Fall II: $\text{nicht}(PG \perp g)$



(1)	$\exists PC^+ \subset gP^-$: $\lvert\angle LGP\rvert = \lvert\angle LGC\rvert$	Winkelmaßaxiom, Winkel-konstruktionsaxiom	11
(2)	$\exists P' \in PC^+$: $\lvert GP'\rvert = \lvert GP\rvert$	Abstandsaxiom, Axiom vom Lineal	
(3)	$\exists L: \{L\} = g \cap \overline{PP'}$	P und P‘ gehören zu verschiedenen Halbebenen bzgl. g	
(4)	$\overline{GL} \cong \overline{GL}$	trivial	
(5)	$\overline{LGP'} \cong \overline{LGP}$	(1), (2), (4), SWS	
(6)	$\angle PLG \cong \angle P'LG$	(5)	
(7)	$\lvert\angle PLG\rvert = \lvert\angle P'LG\rvert = 90$	kongruente Nebenwinkel, also rechte Winkel	
(8)	$PL \perp g$	(7)	

c) Beweisen Sie für Fall 2 die Eindeutigkeit von l.



Annahme:

Es existieren zwei verschiedene Lote von P auf g: $\overline{PL_1}$ und $\overline{PL_2}$.

Wegen $PL_1 \perp g$ und $PL_2 \perp g$ sind die Winkel α_1 und α_2 rechte Winkel (*).

Als Außenwinkel des Dreiecks $\overline{L_2L_1P}$ ist der Winkel α_2 größer als der nicht anliegende Innenwinkel α_1. Das ist jedoch ein Widerspruch zu (*).

3

erreichte Punktzahl:

PH Heidelberg, Fach Mathematik, Klausur zur Teilprüfung Modul 2, Einführung in die Geometrie, SS2010, 30.07.2010

Name: Vorname: Matrikelnr.:

Aufgabe 3: Winkelhalbierende

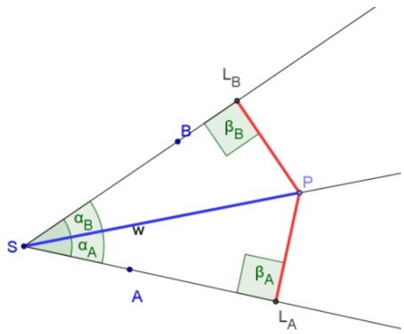
a) In einer Definition I möge der Begriff der Winkelhalbierenden derart beschrieben sein, dass die Semantik der Begriffsbezeichnung in der Definition zum Tragen kommt. Formulieren Sie eine Variante von Definition I.

Definition I: (Winkelhalbierende) Der Strahl SW^+ heißt Winkelhalbierende des Winkels $\angle ASB$, wenn SW^+ zum Inneren von $\angle ASB$ gehört und $\angle WSA \cong \angle WSB$ gilt.	2	

b) Satz I: Wenn ein Punkt P aus dem Inneren des Winkels $\angle ASB$ zu den Schenkeln SA^+ und SB^+ ein und denselben Abstand hat, dann gehört P zur Winkelhalbierenden w des Winkels $\angle ASB$. Beweisen Sie, dass Satz I in der absoluten Geometrie gilt. (Sie dürfen sich auf eine Skizze beziehen.)

Voraussetzung: $\overline{PL_A} \cong \overline{PL_B}$, $\lvert\beta_A\rvert = \lvert\beta_B\rvert = 90$	1	
Behauptung: $\alpha_A \cong \alpha_B$	1	
Skizze und Beweis: (siehe unten)	6	

Skizze und Beweis:



(1)	$\overline{PL_A} \cong \overline{PL_B}$	Voraussetzung
(2)	$\beta_A \cong \beta_B$	Voraussetzung
(3)	$\overline{SP} \cong \overline{SP}$	trivial
(4)	β_A und β_B sind jeweils die größten Innenwinkel der Dreiecke $\overline{PSL_A}$ und $\overline{PSL_B}$	rechte Winkel, Folgerung aus dem schwachen Außenwinkelsatz
(5)	$\overline{SP}$ ist sowohl im Dreieck $\overline{PSL_A}$ als auch im Dreieck $\overline{PSL_B}$ die längste Seite	(4) und Seiten-Winkelbeziehungen im Dreieck
(6)	$\overline{PSL_A} \cong \overline{PSL_B}$	(1), (2), (3), (5), SSW
(7)	$\alpha_A \cong \alpha_B$	(6)

c) Unter Satz II wollen wir die Umkehrung von Satz I verstehen. Formulieren Sie Satz II, ohne die „Wenn-Dann-Form" zu verwenden.

Satz II: (Umkehrung von Satz I) Jeder Punkt der Winkelhalbierenden eines Winkels α hat zu den Schenkeln von α jeweils ein und denselben Abstand.	2	

erreichte Punktzahl:

Name: Vorname: Matrikelnr.:

d) Satz II kann korrekt bewiesen werden. Satz III möge Satz I und Satz II zu einem Kriterium zusammenfassen. Ergänzen Sie Satz III:

Satz III: Es sei P ein Punkt aus dem Inneren des Winkels α. P ist genau dann ein Punkt der Winkelhalbierenden von α, wenn er zu den Schenkeln von α jeweils ein und denselben Abstand hat.	2	

e) Verwenden Sie Satz III für eine neue Definition des Begriffs Winkelhalbierende.

Definition II: (Winkelhalbierende) Die Winkelhalbierende eines Winkels α ist die Menge aller Punkte aus dem Inneren von α, die zu den Schenkeln von α jeweils ein und denselben Abstand haben.	2	

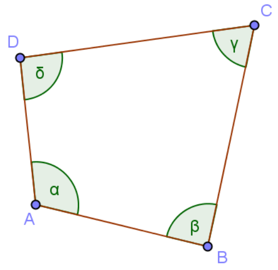
erreichte Punktzahl:

Name: Vorname: Matrikelnr.:

Aufgabe 4: Beweis Sätze am Kreis

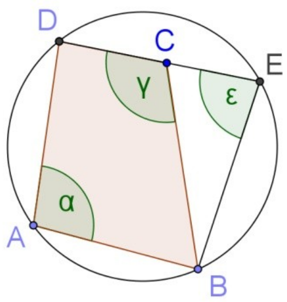
Es sei $\overline{ABCD}$ ein Viereck, dessen gegenüberliegende Innenwinkel supplementär sind. Man beweise, dass $\overline{ABCD}$ ein Sehnenviereck ist.

Ergänzen Sie das folgende Beweisfragment:

		Voraussetzung: $\|\alpha\| + \|\gamma\| = 180$ $\|\beta\| + \|\delta\| = 180$	2	
		Behauptung: Es existiert ein Kreis k mit $:A, B, C, D \in k$.	2	

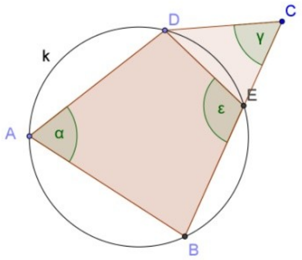
Nr.	Skizze	Beweisschritt	Begründung		
(1)		Es existiert genau ein Kreis k, mit $A \in$, $B \in$ und $D \in$	Existenz und Eindeutigkeit des Umkreises des Dreiecks $\overline{ABD}$	2	

Fall 1:

Annahme: C liegt im Inneren von k.				1	
(2)		$\exists\, E: E \in DC^+ \wedge E \in k$	klar		
(3)		$\|\alpha\| + \|\gamma\| = 180$	Voraussetzung	1	
(4)		$\|\alpha\| + \|\varepsilon\| = 180$	$\overline{ABED}$ ist Sehnenviereck	1	
(5)		$\|\varepsilon\| = \|\gamma\|$	(3) und (4)	2	
(6)		Widerspruch zu: $\|\gamma\| > \|\varepsilon\|$	schwacher Außenwinkelsatz	3	

Beweisen Sie einen weiteren Fall mit Hilfe der nachfolgenden Tabelle nun weitgehend selbständig und fügen Sie eine aussagekräftige Skizze mit ein.

Fall 2:

Annahme: C liegt derart außerhalb des Kreises k, dass $\overline{BC}$ mit k den Punkt E gemeinsam hat				9	
(7)		$\|\alpha\| + \|\gamma\| = 180$	Voraussetzung		
(8)		$\|\alpha\| + \|\varepsilon\| = 180$	$\overline{ABED}$ ist Sehnenviereck		
(9)		$\|\varepsilon\| = \|\gamma\|$	(7) und (8)		
(10)		Widerspruch zu: $\|\gamma\| > \|\varepsilon\|$	schwacher Außenwinkelsatz		
(11)					

erreichte Punktzahl:

Name: Vorname: Matrikelnr.:

Auswertung:

Note	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
Punkte	64 - 60	59 - 56	55 - 51	50 - 47	46 - 42	41 - 37	36 - 32	31 - 24	23 - 16	15 - 8	7 - 0

erreichte Punktzahl:	
Note:	

erreichte Punktzahl: