

Bogenmaß

Sinn und Zweck dieses Arbeitsblattes

Auch wenn die Veranstaltung lineare Algebra heißt, brauchen wir gewissen Kenntnisse zu den Winkelfunktionen Sinus und Kosinus. Einer der Knackpunkte bezüglich eines grundlegenden Verständnisses zu den genannten Funktionen ist die Idee des Bogenmaßes eines Winkels. Letzteres begründet sich auf den Ideen der Proportionalität und des Umfangs von Kreisen. Aus diesem Grunde reaktivieren wir mit diesem Arbeitsblatt grundlegende Kenntnisse zur Kreisberechnung.

Umfang eines Kreises

Problemstellung

Als Bergdorfbewohner fahren wir einen Diesel SUV mit Allradantrieb (Rav4, 178PS). Wir haben den SUV gebraucht gekauft. Im Kaufpreis war ein Satz Winterreifen inbegriffen. Bei genauerem Hinsehen mussten wir feststellen, dass die Winterräder kleiner als die Sommerräder sind. Das ist erlaubt, größer als die Sommerräder hätten die Winterräder allerdings nicht sein dürfen.

Wie es heutzutage üblich ist, hat das Auto ein eingebautes Navi, welches beim Fahren auch die jeweilige momentane Geschwindigkeit anzeigt. Natürlich wird die Geschwindigkeit auch traditionell über den Tachometer angezeigt.

Je nachdem, mit welchen Rädern wir unterwegs sind, kann es passieren, dass die angezeigten Momentangeschwindigkeiten von Tacho und Navi eine Geschwindigkeitsdifferenz anzeigen. Für diesbezügliche genauere Überlegungen habe ich den letzten Räderwechsel (Winter zu Sommer) fotografisch dokumentiert und gleichzeitig Messungen durchgeführt:

1.) Die beiden Räder bzw. Reifen im Vergleich:



links: Winterrad, rechts: Sommerrad

geometrische Kennzeichnung Winterreifen: 235/60 R 16

geometrische Kennzeichnung Sommerreifen: 225/65 R 17

2.) Umfangbestimmung durch Abrollen des Winterrades



1 mal der ganze Gliedermaßstab + angezeigter Rest

3.) Umfangbestimmung durch Abrollen des Winterrades



1 mal der ganze Gliedermaßstab + angezeigter Rest

Bemerkung: Gliedermaßstab ist die korrekte Bezeichnung für das, was man im Volksmund Zollstock nennt. Im süddeutschen Raum sagt man auch: Hol mir mal den Meter. In diesem Fall hat der Meter ausgeklappt die Länge von zwei Metern.

Reifenwechsel und Messungen können Sie sich hier im Video ansehen:

<https://youtu.be/H39hDXZHOEM>

Aufgabe 1.1

- Berechnen Sie die Durchmesser der beiden Räder.
- Informieren Sie sich über die Bedeutung der Bezeichnungen auf den Reifen (235/65 R 16, etc) und berechnen Sie aus den Angaben auf den Reifen die Umfänge der Räder.
- Wir fahren mit dem Rav4 100 km weit. Wieviele Umdrehungen haben die Winter- bzw. die Sommerräder gemacht?
- Wir fahren mit den Sommerrädern entsprechend der Angaben des Navi eine Geschwindigkeit von $130 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Was zeigt der Tacho an?
- Wir fahren mit den Winterrädern entsprechend der Angaben des Navi eine Geschwindigkeit von $130 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Was zeigt der Tacho an?
- Die Winterräder sind aufgezogen. Wir fahren durch eine 30ger Zone mit einer vom Tacho angezeigten Geschwindigkeit von $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. In der Straße steht ein Blitz. Werden wir fotografiert oder nicht?
- Es sei v_S die Geschwindigkeit, die mit Sommerreifen gefahren wird. Mit v_W wollen wir die Geschwindigkeit bezeichnen, die mit den Winterreifen gefahren wird. Stellen Sie v_W als Funktion von v_S grafisch dar.
- Stellen Sie den prozentualen Anteil von v_W von v_S grafisch als Funktion von v_S dar.

Winkel in Bogenmaß

Aufgabe 1.2

In der Regel haben SUV's der Größenordnung des Rav4 Felgen, die mit 5 Radbolzen am Fahrzeug befestigt werden. Selbige sind natürlich symmetrisch angeordnet. Orientierend an den Radbolzen wurde ein Sommerreifen in 5 kongruente Segmente eingeteilt. Rollt das Rad ab, wird dementsprechend von einer der Fünftelmarkierungen zur nächsten Fünftelmarkierung der fünfte Teil des Reifenumfanges zurück gelegt. Selbigen Umstand kann man auch dadurch verdeutlichen, dass man eine Schnur um den Reifen legt und die entsprechenden Bogenlängen markiert:



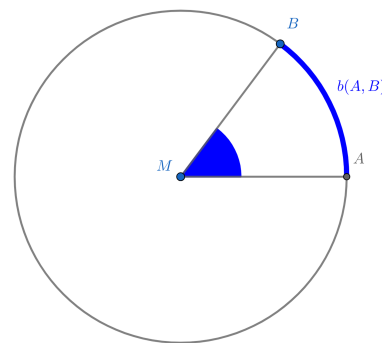
Fünf Fünftel Reifen und damit Fünf Fünftel des Umfangs

- a) Wie groß ist der Rollwinkel (in Gradmaß) der überstrichen wird, wenn das Rad von einer Fünftelmarkierung zur nächsten Fünftelmarkierung abrollt?
- b) Wie lang ist das Stück Schnur von einer zur nächsten Fünftelmarkierung?
- c) Hätte unser Rad den Radius 1(m), dann wäre die Länge der Schnur von einer zur nächsten Fünftelmarkierung die Größe des entsprechenden Abrollwinkels in Bogenmaß. Wie groß ist das Bogenmaß eines Winkels der Größe $\frac{360^\circ}{5}$?
- d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der vorliegenden Aufgabe 1.2 und einem gewissen Herrn namens Bobby Liebling?

Aufgabe 1.3

Unter einem Einheitskreis versteht man einen Kreis mit dem Radius einer Längeneinheit. Der Umfang dieses Kreises berechnet sich zu $u = 2\pi \cdot r = 2\pi$. Dem Umfang entspricht der Vollwinkel von 360° . Dem Halbkreis entspricht ein Winkel von 180° , der dazu gehörige Bogen hat eine Länge von π Längeneinheiten. Es sei k ein Einheitskreis mit dem Mittelpunkt M und A ein Punkt auf k zu jedem Punkt B auf k gibt es jetzt genau einen Winkel $\varphi = \angle A, M, B$. Umgekehrt gibt es zu jedem Winkel φ mit $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ genau einen Punkt $B \in k$ mit $\varphi = \angle A, M, B$. Da es zu jedem Punkt $B \in k$ auch genau einen Bogen $b(AB)$ des Kreises k . Jedem Winkel in Gradmass wird dementsprechend genau ein Bogen $b(A, B)$ zugeordnet und damit natürlich auch genau eine Länge dieses Bogens $|b(A, B)|$. Diese Zuordnung ist umkehrbar eindeutig, wir haben also eine Bijektion von der Menge der Winkel φ mit $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$ auf die Menge der Bogenlängen $0 \leq |b(A, B)| \leq 2\pi$.

$\varphi = 53,2^\circ$
entspricht
 $|b(A, B)| = 0,9$



Ergänzen Sie die folgende Tabelle:

φ	$ b(A, B) $
360°	...
380°	...
90°	...
45°	...
30°	...
60°	...
20°	...
10°	...
215°	...

Eine Geogebra-datei zum Thema finden Sie hier: <https://www.geogebra.org/m/wv9xkdx>.

Aufgabe 1.4

Wir erweitern unsere Betrachtungen dahingehend, dass wir den Punkt B auf k mehrfach den Mittelpunkt M umkreisen lassen. Damit sind dann auch Winkelgrößen mit $\varphi > 360^\circ$ (φ umkreist M mathematisch positiv) und $\varphi < 0^\circ$ (B umkreist M mathematisch negativ) möglich. Berechnen Sie überschlagsmässig im Kopf die folgenden Bogenmaße ($\pi \approx 3$) bzw. Winkel in Gradmaß:

φ in Gradmaß	φ in Bogenmaß
720°	...
370°	...
-150°	...
...	18
...	-3
...	1200

Aufgabe 1.5

- Entwickeln Sie jeweils eine Formel zur Umrechnung von Grad- in Bogenmaß bzw. umgekehrt.
- Die Zuordnung Gradmaß zu Bogenmaß ist eine Proportionalität. Die grafische Darstellung dieser Proportionalität ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung. Zeichnen Sie diese Gerade und bestimmen Sie ihren Anstieg m .
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesem Anstieg m und dem Anstieg der grafischen Darstellung der Umkehrabbildung Bogenmaß auf Gradmaß?

Aufgabe 1.6

Zur enaktiven Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Grad und Bogenmaß hat Frau Schultze-Krötendörfer für die 9a einen Satz Deckel für Gläser zum Einmachen vom Marktführer Weck günstig gekauft. Jeder Deckel hat einen Durchmesser von 11cm. Die Schülerinnen und Schüler werden die Deckel in Mittelpunktslage auf ein gezeichnetes Polarkoordinatensystem legen und durch geschicktes Arbeiten mit einer Schnur die den Winkeln zugehörigen Bogenlängen auf dem Rand des Deckels abmessen und zurechtschneiden. Am Ende der Arbeitsphase hat jede Schülerin bzw. jeder Schüler jeweils genau ein Stück Schnur, dessen Länge jeweils dem zugehörigen Bogen zu den Winkeln $10^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ entspricht.



Am Ende der Arbeitsphase hat jede Schülerin bzw. jeder Schüler jeweils genau ein Stück Schnur, dessen Länge jeweils dem zugehörigen Bogen zu den Winkeln $10^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ entspricht.

- Wie lang sind die jeweiligen Schnurstücke?

- b) Generieren Sie mittels Geogebra ein Polarkoordinatensystem und drucken Sie dieses im Maßstab 1 zu 1 aus (1cm in Geogebra soll auch einem ausgedruckten Zentimeter entsprechen. Verwenden Sie hierzu das alte System Geogebra Classic. <https://www.geogebra.org/classic>)
- c) Frau Schultze-Kröttendörfer will in den folgenden Stunden die Weckglasdeckel als Einheitskreise benutzen. Fertigen Sie ein Lineal an, bezüglich dessen die Weckglasdeckel Einheitskreise sind. (Auch wir werden derartige Einheitskreise verwenden.)