Übungsaufgaben Einführung in die Geometrie, mathematische Grundlagen II, Serie 5 SoSe 2013

Gieding

27.05.2013 - 02.06.2013

Aufgabe 5.01

Wir betrachten das folgende Modell $\mathbb{M} := (\mathbb{P}, \mathbb{G}, \text{inz})$ für die Inzidenzgeometrie:
Modellpunkte $\mathbb{P}$:
$\mathbb{P} := \{A, B, C, D\}$
Modellgeraden $\mathbb{G}$:
$\mathbb{G} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}\}$
Inzidenz inz:
Elementbeziehung: Ein Punkt P inzidiert mit einer Geraden g , wenn er zu g gehört: $P \operatorname{inz} g :\Leftrightarrow P \in g$

a) Warum ist $\mathbb{M}$ kein Modell für die ebene Inzidenzgeometrie?

b) Ergänzen Sie $\mathbb{M}$ derart, dass alle Axiome der ebenen Inzidenz erfüllt sind.

Lösung von Aufgabe 5.01 S SoSe 13

Das Modell besteht aus 4 Modellpunkten, den Punkten A, B, C, D. Nach Axiom $I/1$ muss durch je zwei Punkte genau eine Gerade gehen. Das wären bei 4 Punkten genau 6 Geraden. Das Modell beinhaltet jedoch nur 5 Modellgeraden. Es fehlt die Gerade $\{C, D\}$.

Aufgabe 5.02

Die Axiome eines Axiomensystems sollen unabhängig voneinander sein. Was versteht man darunter?

Lösung von Aufgabe 5.02 S SoSe 13

Eine Menge von Axiomen $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ ist unabhängig wenn für kein $i \leq n$ gilt: A_i ist Folgerung aus $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \setminus \{A_i\}$.

Aufgabe 5.03

Die Axiome eines Axiomensystems sollen widerspruchsfrei sein. Was versteht man darunter?

Lösung von Aufgabe 5.03 S SoSe 13

Ein Axiomensystem $\mathbb{A}$ ist widerspruchsfrei, wenn es keine Aussage A gibt, für die gilt: A ist Folgerung aus $\mathbb{A}$ und $\neg A$ ist Folgerung aus $\mathbb{A}$.

Aufgabe 5.04

Satz I: Je drei nicht kollineare Punkte sind paarweise verschieden.

1. Wir formulieren Satz I neu und beginnen mit
   „Es seien A, B und C drei Punkte.“ Ergänzen Sie:
   „Wenn A,B und C ... , dann ....“

2. Beweisen Sie Satz I indirekt mit Widerspruch.

3. Bilden Sie die Kontraposition von Satz I.

4. Beweisen Sie auch die Kontraposition von Satz I.

5. Formulieren Sie die Umkehrung von Satz I.

6. Gilt auch die Umkehrung von Satz I?

Lösung von Aufgabe 5.04 S SoSe 13

1. „Es seien A, B und C drei Punkte.“
   „Wenn A,B und C nicht zu ein und derselben Geraden gehören , dann sind sie paarweise verschieden.“

2. Voraussetzung: nKoll(A, B, C)
   `Behauptung:` $A \not\equiv B \not\equiv C \not\equiv A$
   `Annahme:` o.B.d.A. $A \equiv B$
   `Beweisführung:` Durch B und C geht nach Axiom $I/1$ genau eine Gerade. Zu dieser Geraden gehören B und C und da A und B identisch sind auch der Punkt A: Koll(A, B, C): $\lightning$ zur Voraussetzung.

3. Wenn von drei Punkten zwei identisch sind, dann sind die drei Punkte kollinear.

4. Es seien A, B, C drei Punkte mit
   Voraussetzung: $A \equiv B$.
   Behauptung: Koll(A, B, C)
   Beweis: Durch B und C geht nach Axiom $I/1$ genau eine Gerade. Zu dieser Geraden gehören B und C und da A und B identisch sind auch der Punkt A.

5. Wenn drei Punkte paarweise verschieden sind, dann sind diese Punkte nicht kollinear.

6. Nein, drei paarweise verschiedene Punkte können selbstverständlich auch zu ein und derselben Geraden gehören.

Aufgabe 5.05

Beweisen Sie Satz I.6: Eine Ebene und eine nicht in ihr liegende Gerade haben höchstens einen Punkt gemeinsam.

Lösung von Aufgabe 5.05 S SoSe 13

Es seien ε eine Ebene und g eine Gerade.
Voraussetzung: g liegt nicht vollständig in ε
Fall 1: $g \cap \varepsilon = \emptyset$, alles ist in Ordnung
Fall 2: g und ε haben genau einen Punkt P gemeinsam: alles ist in Ordnung
Annahme: $\exists P, Q : P \not\equiv Q \wedge g \cap \varepsilon = \{P, Q\}$
Beweisführung: Nach Axiom $I/5$ liegt g vollständig in ε: $\lightning Voraussetzung$.

Aufgabe 5.06

Definieren Sie den Begriff der Komplanarität für Punkte. Ab wieviel Punkte macht der Begriff Sinn? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 5.06 S SoSe 13

Eine Menge M von Punkten heißt komplanar, wenn es eine Ebene ε gibt, in der alle Punkte aus M liegen:
$Komp(M) :\Leftrightarrow \exists \varepsilon : \forall P \in M : P \in \varepsilon$.
Besteht M aus einem Punkt oder ist M zwei- bzw. dreielementig, dann ist M auf jeden Fall komplanar. Erst Mengen mit mehr als drei Elementen können nicht komplanar sein. Daher macht der Begriff der Komplanariatätnur für Mengen mit mehr als drei Elementen Sinn.

Aufgabe 5.07

Man muß jederzeit an Stelle von „Punkten“, „Geraden“, „Ebenen“, „Tische“, „Stühle“, „Bierseidel“ sagen können.
David Hilbert (1862-1943)

Interpretieren Sie die Aussage von Hilbert bezüglich der axiomatischen Geometrie. Hinweis: Der Begriff des Modells hilft.

Lösung von Aufgabe 5.07 S SoSe 13

Punkte, Geraden und Ebenen sind mathematische Objekte. Als solche existieren sie nicht in Form von materiell/stofflichen Objekten. Stoffliche Modelle helfen, die mathematischen Objekte Punkt, Gerade und Ebene zu veranschaulichen. So können in gewissen Modellen die Punkte Objekte aus Knete sein etc.. Jedes Modell für unsere Punkte, Geraden und Ebenen und deren Beziehungen untereinander sind gleichberechtigt (insofern sie korrekte Modelle sind). Insofern könnten auch Stühle, Tische und Bierseidel als Modelle für die Geometrie dienen.

Aufgabe 5.08

Wir schreiben das Jahr 2022. Sie sind eine gestandene Mathematiklehrerin bzw. ein gestandener Mathematiklehrer. Das Blatt hat sich inzwischen gewendet und die Erleichterungspädagogik (Du magst keine Mathematik, dann sing doch ein Lied, du kannst kein Lied singen, dann bau doch einen Turm, du kannst keinen Turm bauen, dann streichle doch einen Esel, du traust dich nicht einen Esel zu streicheln, .. ist doch egal du bist so autistisch quatsch authentisch ...) ist nicht mehr gesellschaftsfähig. Stattdessen haben Hardcoremathematiker aus China bezüglich des deutschen Mathematikunterrichts das Sagen. Die Lehrmittelverlage (die Pharmaindustrie der Bildung) freuen sich und produzieren neuen Content (hard und soft/ Hauptsache es bringt Geld). Ein Außendienstler von KlättKotza (Die Namenswahl ist zufällig und hat nichts mit existierenden Lehrmittelverlagen zu tun. Ähnlichkeiten sind auch nicht beabsichtigt.) erscheint bei Ihnen und möchte Ihnen einen Schülersatz Modelle für die räumliche Inzidenzgeometrie verkaufen: “Schauen Sie mal da hätten wir jeweils drei Flummis als Modellpunkte für die räumliche Inzidenzgeometrie, die können Sie dann auf diese 2 Schaschlikstäbchen, die Modellgeraden stecken. Schüler lieben Flummis und Schaschlik. Natürlich enthalten unsere Flummis krebserregende Weichmacher (da sind wir ganz ehrlich), die entweichen jedoch erst in 123 Jahren. Wenn Sie 10 Klassensätze kaufen, bekommen Sie den 12. umsonst und 10 Gratisexamplare von unserer Firmenzeitschrift „Die Welt von KlättKotza“.“

a) Nennen Sie zwei ethisch/moralische Gründe, warum Sie nicht bei dem Außendienstler von KlättKotza kaufen.

b) Nennen Sie zwei Gründe aus der Sicht der Fachwissenschaft Mathematik, warum Sie nicht bei dem Außendienstler von KlättKotza kaufen.

c) Nennen Sie zwei Gründe aus der Sicht der Didaktik des Faches Mathematik, warum Sie nicht bei dem Außendienstler von KlättKotza kaufen.

Lösung von Aufgabe 5.08 S SoSe 13

a) ...

b) Axiom $I/7$ fordert die Existenz von wenigstens vier paarweise verschiedenen Punkten. Die drei Flummis als Modellpunkte sind damit nicht ausreichend. Durch je zwei dieser Punkte muss genau eine Gerade gehen. Das Modell müsste dementsprechend aus wenigstens sechs Geraden bestehen. Zwei Schalikstäbchen als Modellgerade sind somit nicht ausreichend.

c) Da das Flummi/Schaschlikstäbchenmodell die Inzidenzgeometrie nicht korrekt abbildet, ist es auch aus didaktischer Sicht nicht geeignet. Ferner ist es wohl sinnvoller, dass die Schüler ihre eigenen Modelle generieren.

Aufgabe 5.09

Mario: Jede Gerade hat unendlich viele Punkte.
Marion: Das folgt jedoch nicht aus den Axiomen der Inzidenzgeometrie.
Wer hat Recht? Begründen Sie Ihre Meinung.

Lösung von Aufgabe 5.09 S SoSe 13

Natürlich haben beide Recht. In der Euklidischen Geometrie besteht jede Gerade aus überabzählbar unendlichen vielen Punkten. Weil es jedoch Modelle für die Inzidengeometrie gibt, in denen jede Gerade aus genau zwei Punkten und das Modell selbst nur aus vier Punkten besteht, ist es nicht möglich, nur aus den Axiomen der Inzidenz die Existenz von unendlich vielen Punkten zu folgern. Diesbezüglich wird es weiterer Axome bedürfen.

Aufgabe 5.10

Es seien A, B, C, D vier paarweise verschiedene Punkte.
Beweisen Sie:
$\text{nKomp}(A, B, C, D) \Rightarrow \text{nKoll}(A, B, C)$.

Lösung von Aufgabe 5.10 S SoSe 13

Voraussetzung: nKomp(A, B, C, D)
Behauptung: nKoll(A, B, C)
Annahme: Koll(A, B, C)
Beweisführung:
Fall 1:
D liegt nicht auf BC.
Nach Axiom $I/4$ gibt es jetzt eine Ebene ε in der die Punkte B, C, D liegen.
Weil zwei Punkte der Geraden BC in ε liegen, gehört nach $I/5$ auch der Punkt A als Punkt von BC zu ε.
Also: Komp(A, B, C, D) $\lightning$ Voraussetzung
Fall 2:
Koll(A, B, C, D)
$I/3$ liefert einen Punkt E, der nicht auf BC liegt, weiter wie im Fall 1 ...