Übungsaufgaben Einführung in die Geometrie, mathematische Grundlagen II, Serie 6 SoSe 2013

Gieding

03.06.2013 - 09.06.2013

Aufgabe 6.01

Lena aus der 5a erklärt Ihnen, was eine Strecke ist:
Strecken sind Teile von Geraden. Mein Papa hat mir gesagt, dass die Mathematiker nicht einfach so Teil sondern Teilmenge sagen. Und zu einer Festlegung sagen sie Definition. Ich definiere also:
Eine Teilmenge einer Geraden ist eine Strecke.

a) Formulieren Sie Lenas „Definition“ als Konventionaldefinition.

b) Es ist klar, dass Lenas Definition nicht den formal korrekten Ansprüchen eines Mathematikers genügt. Aber auch im Sinne einer informellen Definition auf Schülerniveau wäre Lenas Definition verbesserungswürdig. Skizzieren Sie einen Denkanstoß, den Sie Lena geben würden, damit sie selbst ihre Definition präzisieren kann.

c) Formulieren Sie eine verbesserte Variante von Lenas Definition. Bleiben Sie dabei auf dem Niveau einer informellen Definition.

Aufgabe 6.02

Im Folgenden sind wieder formal korrekte Definitionen verlangt. Zur Verfügung steht Ihnen dazu nur die bisher aufgebaute axiomatische Theorie der Geometrie.

a) Definieren Sie den Begriff offene Strecke.

b) Definieren Sie mittels des Begriffes der offenen Strecke den Begriff der (geschlossenen) Strecke.

c) Was könnte man unter einer halboffenen Strecke verstehen? Formulieren Sie eine entsprechende Definition.

d) Definieren Sie den Begriff Länge einer Strecke.

e) Definieren Sie den Begriff Mittelpunkt einer Strecke.

f) Was könnte man unter den Viertelpunkten einer Strecke verstehen? Definieren Sie den Begriff.

Aufgabe 6.03

Definieren Sie den Begriff Halbgerade AB^+ und Halbgerade AB^-.

Aufgabe 6.04

Es seien M eine Menge und $T_1, T_2, \ldots, T_n$ Teilmengen von M.
Man spricht davon, dass die Zerlegung von M in die Teilmengen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ eine Klasseneinteilung von M ist, wenn Folgendes gilt:

(I) $\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n : T_i \neq \emptyset$

(II) $T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n = M$

(III) $\forall i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j : T_i \cap T_j = \emptyset$

Begründen Sie, warum die Zerlegung einer Geraden AB in die Halbgeraden AB^+ und AB^- keine Klasseneinteilung von AB ist.

Aufgabe 6.05

Es seien A, B und C drei paarweise verschiedene kollineare Punkte. Beweisen Sie, dass genau einer dieser drei Punkte zwischen den anderen beiden dieser drei Punkte liegt.

Aufgabe 6.06

Wir befinden uns in der ebenen Geometrie.
Gegeben seien die beiden Punkte A und B mit $|AB| = 5$. Sie mit dem Zirkel 12 Punkte
$P_1, P_2, \ldots P_12$, für die gilt: $|AP_i| + |BP_i| = 10$, $1 \leq i \leq 12$.

Aufgabe 6.07

Zeigen Sie, dass für drei paarweise verschiedene Punkte A, B und C gilt:
Wenn $C \in AB^+$ und $|AB| < |AC|$ dann gilt $\mathrm{Zw}(A, B, C)$

Aufgabe 6.08

Definition:Zwei Geraden sind komplanar, wenn es eine Ebene gibt, die beide Geraden vollständig enthält. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Satz *:
Wenn zwei Geraden g und h genau einen Schnittpunkt haben, so sind sie komplanar.

Aufgabe 6.09

Wir betrachten die folgende Menge $\mathbb{P}$von Modellpunkten:
$\mathbb{P} := \{P_{i,j} | 0 \leq i \leq 9 \wedge 0 \leq j \leq 9\}$.
Auf der Menge der Modellpunkte definieren wir den Abstand zweier Modellpunkte $P_{m,n}$ und $P_{q,r}$:
$|P_{m,n}P_{q,r}| := |m - q| + |n - r|$

Beispiel:
$|P_{3,4}P_{5,1}| := |3 - 5| + |4 - 1| = | - 2| + |3| = 5$
Untersuchen Sie, ob in dem Modell die Dreiecksungleichung erfüllt ist:
$\forall A, B, C \in \mathbb{P} : |AB| + |BC| \leq |AC|$

Aufgabe 6.10

Wir gehen von dem Modell aus Aufgabe 6.09 aus. Wir betrachten in diesem Modell (ebene Geometrie) einen Kreis k mit dem Mittelpunkt $M := P_{3,3}$ und dem Radius $r = 2$. Zählen Sie alle Punkte auf, die zu k gehören.