6 Lösen und Lösbarkeit von LGS

Aufgabe 6.1

Gegeben Sei das Gleichungssystem .

Zeigen Sie, dass diese Schreibweise eines Gleichungssystems zur folgenden Schreibweise äquivalent ist:

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.2

(I) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(II) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(III) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

a) *In welchem Fall könnte das zugehörige Gleichungssystem eindeutig lösbar sein?*

b) *Generieren Sie für den potentiellen Fall der eindeutigen Lösbarkeit eine erweiterte Koeffizientenmatrix derart, dass das zugehörige Gleichungssystem wirklich eindeutig lösbar ist. Geben Sie diese Lösung an.*

Aufgabe 6.3

Gegeben sei die Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Die Determinante $M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ *von* M *berechnet sich zu* $a \cdot d - b \cdot c$.

Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der Lösbarkeit eines LGS mit M *als kleiner Koeffizientenmatrix und der Determinante von* M.

Aufgabe 6.4

Gegeben Sei das Gleichungssystem

$$3x + 3y = c \tag{1}$$
$$x - y = 2 \tag{2}$$

. Lösen Sie dieses Gleichungssystem in Abhängigkeit von c.

Aufgabe 6.5

Lösen Sie das folgende LGS. Geben Sie die Lösungsmenge in Form gemeiner Brüche an.

$$\begin{array}{rcrcl} -\frac{1}{2}x & + & 3y & = & \frac{3}{4} \\ 2x & - & 4y & = & \frac{7}{8} \end{array}$$

Aufgabe 6.6

Entwerfen Sie für die Klassenstufe 9 eine Sachrechenaufgabe im Kontext "Handytarife", deren Lösung auf ein LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten führt.

Aufgabe 6.7

Es seien $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ drei Ebenen im $\mathbb{R}^3$, die genau den Punkt $S = (\pi, e, \sqrt{2})$ gemeinsam haben. Ferner gelte:

- *ε_x ist parallel zur $y - z-$Ebene,*
- *ε_y ist parallel zur $x - z-$Ebene,*
- *ε_z ist parallel zur $x - y-$Ebene.*

Beschreiben Sie die drei Ebenen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ mittels Gleichungen vom Typ $ax + by + cz = d$.

Aufgabe 6.8

Geben Sie ein lineares Gleichungssystem vom Typ

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x & + & a_{32}y & + & a_{33}z & = & b_3 \end{array}$$

an, bei dem keiner der Koeffizienten Null ist und das die Lösungsmenge $L = \{(\pi, e, \sqrt{2})\}$ hat.

Aufgabe 6.9

Beschreiben Sie die Gerade $g := \{P | P = A + t\overrightarrow{r}, t \in \mathbb{R}\}$ für $\overrightarrow{r} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $A := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Lösungsmenge eines Gleichungssystems vom Typ

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & b_2 \end{array}.$$

Aufgabe 6.10

Lösen Sie das folgende LGS, indem Sie es auf Diagonalenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & | & 2 \\ 3 & 5 & 4 & | & 4 \\ -2 & 1 & 4 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Da es um das Anwenden des Verfahrens geht, hier die Lösungsmenge:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & | & -3 \\ & 1 & & | & 4 \\ & & 1 & | & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.11

Lösen Sie das folgende LGS, indem Sie es auf Diagonalenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 15 & 3 & 7 & | & 10 \\ -4 & -10 & 4 & | & 4 \\ -2 & 1 & 2 & | & 11 \end{pmatrix}$$

Da es um das Anwenden des Verfahrens geht, hier die Lösungsmenge:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & | & -\frac{111}{88} \\ & 1 & & | & \frac{3}{2} \\ & & 1 & | & \frac{307}{88} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.12

Gegeben seien die folgenden Punkte A, B, C, D, E, F, H:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} H = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten einen Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H.

a) *Beschreiben Sie die Flächen dieses Würfels mittels Gleichungen vom Typ $ax+by+cz = d$.*

b) *Beschreiben Sie die Geraden, die durch die Kanten des Würfels eindeutig bestimmt sind als Lösungsmenge jeweils eines Gleichungssystems.*

Aufgabe 6.13

Wir drehen den Würfel aus Aufgabe 4.7 um die $z-$Achse mit einem Drehwinkel von $45°$ mathematisch positiv. Dabei werden die Eckpunkte unseres Würfels auf ihre Bilder $A', B', C', D', E', F', G', H'$ abgebildet.

Geben Sie ein LGS an, das die Koordinaten des Punktes D' und nur die Koordinaten des Punktes D' als Lösungsmenge hat.

Aufgabe 6.14

Wir drehen den gedrehten Würfel aus Aufgabe 4.8 um die $y-$Achse mit einem Drehwinkel von $45°$ in mathematisch postivem Drehsinn.

Die Punkte $A', B', C', D', E', F', G', H'$ werden jetzt auf die Punkte $A'', B'', C'', D'', E'', F'', G'', H''$ abgebildet. Bestimmen Sie eine Gleichung der Form $ax + by + cz = d$ zur Beschreibung des Bildes der Grundfläche $\overline{A'', B'', C'', D''}$ unseres Würfels.

Aufgabe 6.15

Oberstudienrat Kramer gibt seiner 13a die drei Ebenen α, β, γ vor, wobei gelte $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ferner gibt Oberstudienrat Kramer die folgenden Normalenvektoren der Ebenen vor:

$$\overrightarrow{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{n}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{n}_\gamma = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lisa meint, dass das Blödsinn wäre. Hat sie recht oder will sie Oberstudienrat Kramer nur provozieren?