Übungsaufgaben Serie 11

Vorbemerkungen

Beachten Sie:

- Bei den Definitionen werden von Ihnen vollständige, mathematisch formal korrekte Definitionen des jeweiligen Begriffs erwartet.
- Definitionen müssen minimal sein. Sollten in einer Ihrer Definitionen Eigenschaften aufgeführt werden, die aus anderen in der jeweiligen Definition verwendeten Eigenschaften ableitbar sind, so führt das zu Punktabzug.
- Achten Sie auf orthographische und grammatikalische Korrektheit Ihrer Ausführungen. Entsprechende Fehler können in der Klausur zu Punktabzügen führen.

Hilfen:

- Aufgabe 11.2: Lassen sich sich von dem kleinen Ausflug in die lineare Algebra nicht irritieren. Es handelt sich letztlich um eine Aufgabe aus der synthetischen Geometrie, wie wir sie in unserer Lehrveranstaltung betrieben haben. Überlegen Sie sich, was Lösung eines LGS in der Sprache der Mengenlehre bedeutet. Ansonsten ist Raumvorstellungsvermögen bei dieser Aufgabe gefragt. Wenn die Vorstellungskraft versagt, können Sie auch drei Blätter stärkeres Papier als Modelle für die Ebenen verwenden.
- Aufgabe 11.3: Eine analoge Aufgabe wurde bereits im Kontext von Mittelsenkrechten gestellt. Damals half das Mittelsenkrechtenkriterium.
- Aufgabe 11.4: $|a| > |b| \Rightarrow |\alpha| > |\beta|$ wurde bereits gezeigt.
- Aufgabe 11.5: Der Beweis funktioniert direkt. Die notwendigen Sätze wurden in der letzten Vorlesung zur Verfügung gestellt.
- Aufgabe 11.6: Ein Widerspruchbeweis ist das Mittel der Wahl. Ansonsten gilt das Euklidische Parallelenaxiom.

Aufgabe 11.1: Definitionen

a) Definieren Sie den Begriff *Sehne eines Kreises*. (*2 Punkte*)

b) Definieren Sie den Begriff *Kugel*. (*2 Punkte*)

c) Definieren Sie den Begriff *Winkelhalbierende* ohne dabei Winkelgrößen zu verwenden. (*3 Punkte*)

d) Ein *Sehnenviereck* ist ein Viereck mit einem Umkreis. Definieren Sie den Begriff *Sehnenviereck* unter expliziter Verwendung des Begriffs Sehne. (*2 Punkte*)

e) Definieren Sie den Begriff *konvexes Viereck* unter Verwendung des Begriffs *Diagonale*. (*2 Punkte*)

Aufgabe 11.2

In einem linearen Gleichungssystem (LGS) vom Typ

$$\begin{array}{lccccccc} (I) & a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ (II) & a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ (III) & a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{array}$$

lässt sich jede der drei Gleichungen (I), (II), (III) als die analytische Beschreibung jeweils einer Ebene interpretieren. Wir gehen von einem LGS aus, in dem die beschriebenen drei Ebenen paarweise verschieden sind. Wie könnten die Ebenen zueinander liegen, wenn unser LGS nicht lösbar ist? (*4 Punkte*)

Beschreibung:

Aufgabe 11.3

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit den schulüblichen Bezeichnungen. Sie dürfen davon ausgehen, dass sich die Winkelhalbierenden w_α und w_γ dieses Dreiecks in genau dem Punkt S schneiden. Beweisen Sie: $S \in w_\beta$. *(3 Punkte)*

Beweis:

Aufgabe 11.4

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit schulüblichen Bezeichnungen. Beweisen Sie: $|\alpha| > |\beta| \Rightarrow |a| > |b|$.
(*3 Punkte*)

Beweis:

Aufgabe 11.5

Es seien a, b und c drei Geraden. Beweisen Sie:

$$a \perp b \wedge b \perp c \Rightarrow a \| c$$

(4 Punkte)

Beweis:

Aufgabe 11.6

Es seien a, b und c drei komplanare und paarweise nicht identische Geraden. Beweisen Sie:

$$a \| b \wedge b \| c \Rightarrow a \| c$$

(*5 Punkte*)

Beweis:

Platz für weitere Ausführungen