12 Übungsaufgaben zum 12. Februar 2021

Aufgabe 12.1

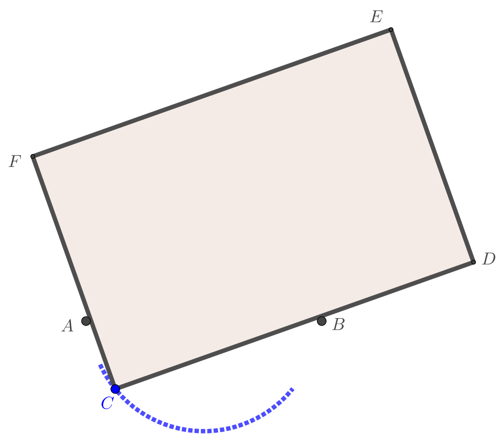
Thales?

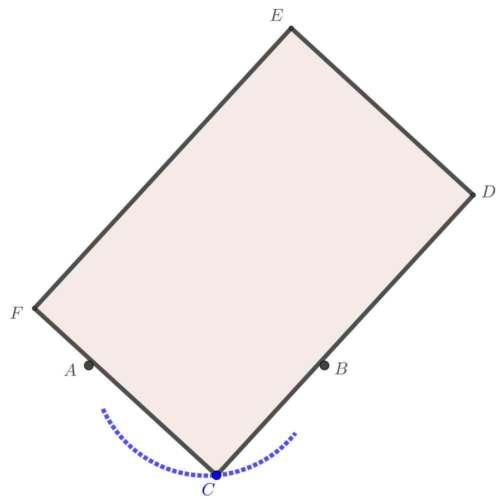
Irina schneidet sich aus dicker Pappe ein Rechteck $\overline{CDEF}$ aus. Dann schlägt sie zwei Nägel A und B in die Wand. Sie stellt das Papprechteck so auf die Nägel, dass die Seite $\overline{CF}$ auf Nagel A und die Seite $\overline{CD}$ auf dem Nagel B liegt. Ansonsten liegt das Rechteck der Wand an. Im Punkt C befestigt sie einen Bleistift und bewegt jetzt dass Rechteck derart, dass die Seiten $\overline{CF}$ und $\overline{CD}$ weiterhin immer jeweils auf dem Nagel A bzw. B aufliegen.

a) Was für eine Kurve zeichnet der Bleistift bei dieser Bewegung auf?

b) Beweisen Sie Ihre Antwort aus Teilaufgabe a).

c) Formulieren Sie einen Satz, der Lenas Experiment beschreibt.





Aufgabe 12.2

Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz, Fall 1

Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Die Strecke $\overline{AB}$ sei eine Sehne von k und der Punkt C sei der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ mit dem Kreis k in der Halbebene AB, M^+. Beweisen Sie:

$$|\angle AMB| = 2 \cdot |\angle ACB|$$

Aufgabe 12.3

Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz, Fall 2

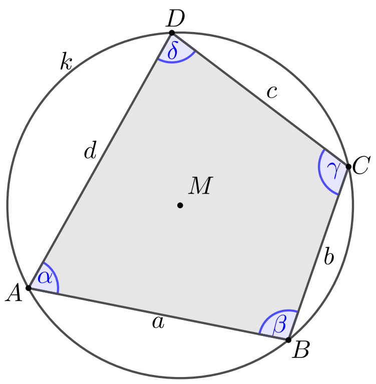
Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und der Sehne $\overline{AB}$, die kein Durchmesser von k ist. R sei ein beliebiger Punkt der offenen Strecke $\overline{BM}$ und C sei der von A verschiedene Schnittpunkt der Geraden AR mit dem Kreis k. Beweisen Sie:

$$|\angle AMB| = 2 \cdot |\angle ACB|$$

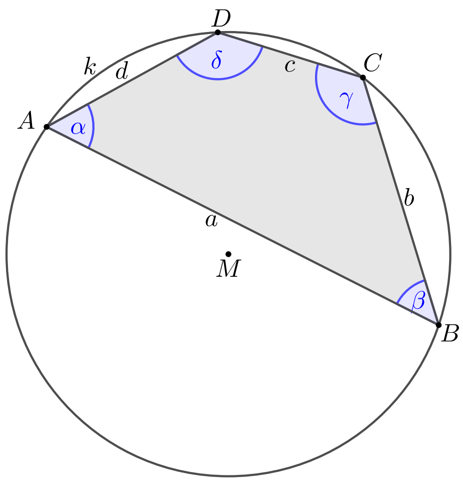
Aufgabe 12.4

Satz über die gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck

In der Vorlesung wurde der Satz über die gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck für den folgenden Fall bewiesen.



Der Beweis aus der Vorlesung funktioniert nicht, wenn der Mittelpunkt des Kreises nicht im Inneren des Sehnenvierecks liegt. Beweisen Sie den Satz über die gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck für den Fall, dass die M nicht im Inneren von $\overline{ABCD}$ liegt:



Aufgabe 12.5

Umkehrung des Satzes über die gegenüberliegenden Winkel im Sehnenviereck

Es sei $\overline{ABCD}$ ein Viereck mit den Innenwinkeln $\alpha = \angle DAB, \beta = \angle ABC, \gamma = \angle BCD$ und $\delta = \angle CDA$. Beweisen Sie:

$$|\alpha| + |\gamma| = 180^\circ \Rightarrow \exists M : \overline{AM} \cong \overline{BM} \cong \overline{CM} \cong \overline{DM}$$

Aufgabe 12.6

symmetrische Trapeze
Beweisen Sie:
Ein Trapez ist genau dann symmetrisch, wenn es ein Sehnenviereck ist.

Aufgabe 12.7

Rechtecke
Wir gehen von folgender Definition des Begriffs Rechteck aus:

Definition 12.1

Rechteck
Ein Viereck $\overline{ABCD}$ ist ein Rechteck, wenn

(1) $AB \| CD$

(2) $AD \| BC$

(3) $AD \perp AB$

gilt.

Beweisen Sie:
Ein Viereck ist genau dann ein Rechteck, wenn seine Diagonalen gleichlang sind und sich gegenseitig halbieren.

Aufgabe 12.8

Tangentenviereck, Definition
Ein Tangentenviereck ist eine Viereck mit einem Inkreis. Formulieren Sie eine formal korrekte Definition des Begriffs Tangentenviereck, die explizit den Begriff Tangente verwendet. (Beachten Sie: Tangenten sind Geraden.)

Aufgabe 12.9

Tangentenviereck, Eigenschaft
Es sei $\overline{ABCD}$ ein Tangentenviereck. Beweisen Sie: $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$.

Aufgabe 12.10

Sehnen-Tangenten-Winkel-Satz
Es seien $\overline{ABC}$ ein Dreieck und t die Tangente in A an den Umkreis von $\overline{ABC}$. D sei ein Punkt auf t in der Halbebene AC, B^+. Beweisen Sie:

$$\angle DAB \cong \angle ACB$$