Übungsaufgaben Einführung in die Geometrie, mathematische Grundlagen II, Serie 8 SoSe 2013

Gieding

17.06.2013 - 23.06.2013

Aufgabe 8.01

Wenn der Mathematiker von einer Fahne spricht, dann meint er ein Element aus der Menge $\mathbb{F}$, die aus allen Tripeln $(A|AB|AB,Q^+)$ mit nKoll(A,B,Q) besteht.

a) Aus was für drei geometrischen Objekten besteht jede Fahne?

b) Ikonisieren Sie den Begriff der Fahne.

c) Erläutern Sie wie der Begriff der Fahne auf *enaktiver Ebene* mit Schülern der SI erarbeitet werden könnte.

Lösung von Aufgabe 8.01 S SoSe 13

a) Aus dem Punkt A, der Geraden AB und der Halbebene $AB,Q^\circ+$

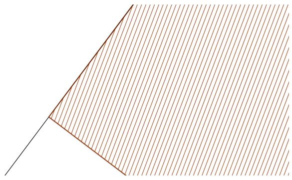
b) Zeichnen Sie eine Halbgerade AB^+ und eine Halbebene, die AB als Trägergerade hat. Fertig ist die Fahne.

c) Blatt Papier falten und auf der Faltgerade eine Halbgerade zeichnen.

Aufgabe 8.02

Die Definition des Begriffs entsprechend Aufgabe 8.01 entspricht der üblichen Vorstellung der Mathematiker von einer Fahne. In der Übung am Donnerstag (13.06.) hatte ich den Begriff unzulässig modifiziert. Hier hatten wir den Begriff der Fahne der üblichen Vorstellung einer Fahne angepasst: Gerade mit einer *an ihr befestigten Viertelebene*. Wir wollen diesen Begriff der ab sofort offiziell als *Heidelberger Übungsfahne* bezeichnen.

Hier eine Ikoniserung des Begriffs *Heidelberger Übungsfahne*.



Die Darstellung ist so zu verstehen, dass die Vereinigungsmenge aller grafisch dargestellten Objekte eine *Heidelberger Übungsfahne* darstellt. Die Schraffur meint dabei den Teil einer Ebene.

a) Formulieren Sie eine Definition des Begriffs *Heidelberger Übungsfahne*.

b) Mit der Formulierung dieser Aufgabe zeigt der Autor (*m.g.*) mangelnde mathematikdidaktische Kenntnisse. Warum?

c) Insbesondere ist die ikonische Darstellung der *Heidelberger Übungsfahne* bezüglich der Aufgabenstellung ungünstig. Warum?

Lösung von Aufgabe 8.02 S SoSe 13

a) Es seien AB^+ und AC^+ zwei verschiedene Halbgeraden. Unter der Heidelberger Übungsfahne $H\ddot{U}F$ versteht man die folgende Punktmenge:
$H\ddot{U}F := AB, C^+ \cap AC, B^+ \cup AB$.

b) Mittels eines einzigen Beispiels kann man kaum einen Begriff einführen ...

c) und das schon gar nicht, wenn es sich bei dem Beispiel um einen ausgesprochenen Spezialfall handelt (Die beiden Strahlen stehen senkrecht aufeinander.).

Aufgabe 8.03

Was haben Halbgeraden und Halbebenen gemeinsam?
Ergänzen Sie:

a) Eine Gerade wird durch einen .... in zwei .... eingeteilt.

b) Eine Ebene wird durch eine .... in zwei .... eingeteilt.

c) Eine Gerade ist ein .....dimensionales Objekt.

d) Eine Ebene ist ein .....dimensionales Objekt.

e) Im Fall dieser Geradenteilung ist der Trenner ein .....dimensionales geometrisches Objekt.

f) Im Fall dieser Ebenenteilung ist der Trenner ein .....dimensionales geometrisches Objekt.

g) Wenn also n die Dimension des geometrischen Objekts ist, das geteilt wird, dann hat der Trenner die Dimension ..... .

Lösung von Aufgabe 8.03 S SoSe 13

a) Eine Gerade wird durch einen `Punkt` in zwei `Halbgeraden` eingeteilt.

b) Eine Ebene wird durch eine `Gerade` in zwei `Halbebenen` eingeteilt.

c) Eine Gerade ist ein `ein`dimensionales Objekt.

d) Eine Ebene ist ein `zwei`dimensionales Objekt.

e) Im Fall dieser Geradenteilung ist der Trenner ein `null`dimensionales geometrisches Objekt.

f) Im Fall dieser Ebenenteilung ist der Trenner ein `ein`dimensionales geometrisches Objekt.

g) Wenn also n die Dimension des geometrischen Objekts ist, das geteilt wird, dann hat der Trenner die Dimension $n - 1$.

Aufgabe 8.04

Beweisen Sie mittels eines direkten Beweises:
Wenn zwei Mengen M_1 und M_2 konvex sind, dann ist auch ihre Schnittmenge konvex.

Lösung von Aufgabe 8.04 S SoSe 13

Es seien M_1 und M_2 zwei konvexe Punktmengen.
Es seien A und B zwei verschiedene Punkte aus $M_1 \cap M_2$.
Entsprechend der Definition einer Schnittmenge gilt jetzt:

(I) $A \in M_1 \wedge B \in M_1$

(II) $A \in M_2 \wedge B \in M_2$

(III) Wegen (I) und wegen der Konvexität der Menge M_1 gilt $\overline{AB} \subseteq M_1$.

(IV) Wegen (II) und wegen der Konvexität der Menge M_2 gilt $\overline{AB} \subseteq M_2$.

(V) Zusammengenommen sagen (III) und (IV) nichts anderes aus, als dass mit zwei Punkten aus $M_1 \cap M_2$ die gesamte Verbindungsstrecke der beiden Punkte in $M_1 \cap M_2$ liegt.

Aufgabe 8.05

Beweisen Sie mittels eines indirekten Beweises:
Wenn zwei Mengen M_1 und M_2 konvex sind, dann ist auch ihre Schnittmenge konvex.

Lösung von Aufgabe 8.05 S SoSe 13

Wir beweisen die Kontraposition:
Wenn $M_1 \cap M_2$ nicht konvex ist, dann sind auch M_1 und M_2 nicht konvex.

(I) $\exists A, B \in M_1 \cap M_2 : \overline{AB} \not\subseteq M_1 \cap M_2$ ($M_1 \cap M_2$ ist nicht konvex)

(II) Sollte $\overline{AB} \subseteq M_1 \land \overline{AB} \subseteq M_2$ gelten, müsste auch $\overline{AB} \subseteq M_1 \cap M_2$ gelten.

Aufgabe 8.06

Formulieren Sie die Umkehrung der Implikation aus Aufgabe 8.05 und untersuchen Sie den Wahrheitswert dieser Umkehrung

Lösung von Aufgabe 8.06 S SoSe 13

Umkehrung: $M_1 \cap M_2$ konvex $\Rightarrow$ M_1 konvex und M_2 konvex.
Die Umkehrung ist nicht wahr. Man kann zwei nicht konvexe Menegen derart schneiden, dass die Schnittmenge konvex ist.

Aufgabe 8.07

Es sei $\overline{ABCD}$ ein konvexes Viereck. Definieren Sie den Begriff Inneres von $\overline{ABCD}$ mittels des Begriffs Vereinigungsmenge.

Lösung von Aufgabe 8.07 S SoSe 13

$\mathrm{I}(\overline{ABCD}) := \mathrm{I}(\overline{ABC}) \cup \mathrm{I}(\overline{CDA})$

Aufgabe 8.08

Begründen sie, warum die folgenden Implikationen keine Sätze sind:

a) Die Vereinigungsmenge zweier konvexer Mengen ist konvex.

b) Die Schnittmenge zweier nicht konvexer Mengen ist nicht konvex.

Lösung von Aufgabe 8.08 S SoSe 13

Zeichnungen helfen.

Aufgabe 8.09

Definieren Sie den Begriff regelmäßiges n-Eck.
Hinweis: Der Begriff des Kreises hilft.

Lösung von Aufgabe 8.09 S SoSe 13

Es sei k ein Kreis und $P_1, P_2, \ldots, P_n$ eine Menge von Punkten auf k mit
$|P_iP_{i+1}| = |P_{i+1}P_{i+2}| = |P_{i+2}P_{i+3}| = \ldots |P_{n-1}P_n| = |P_nP_1|$.
Die Vereinigungsmenge $\overline{P_1P_2} \cup \overline{P_2P_3} \cup \ldots \overline{P_{n-1}P_n} \cup \overline{P_nP_1}$ heißt regelmäßiges n-Eck.

Aufgabe 8.10

Es sei g eine Gerade der Ebene ε. Ferner seien A, B, C drei nicht kollineare Punkte der Ebene ε. Keiner dieser drei Punkte möge zu g gehören. Es gelte: $B \in gA^+$.
Beweisen Sie:

a) $C \in gA^+ \Rightarrow C \in gB^+$

b) $C \in gA^- \Rightarrow C \in gB^-$

Lösung von Aufgabe 8.10 S SoSe 13

Axiom von Pasch hilft.