Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 4

(Lösungen)

Beweise einiger Sätze der Schulgeometrie

1. Im Folgenden ist ein Beweis des Innenwinkelsatzes für Dreiecke in einer Art angegeben, wie er in Schulbüchern (meist der Klassenstufe 7) zu finden ist.

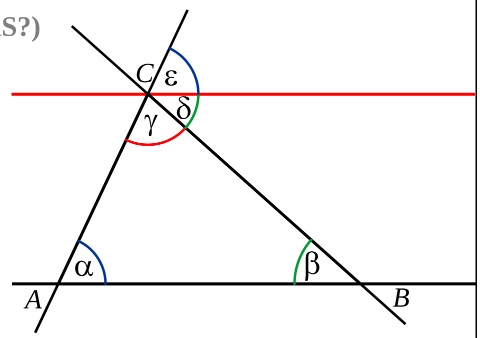
Innenwinkelsumme eines Dreiecks

Voraussetzung: α, β und γ sind Innenwinkel des Dreiecks *ABC*

Behauptung: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Beweis:

- Wir konstruieren die Parallele zu *AB* durch den Punkt *C*. **(WARUM GEHT DAS?)**
- Sind δ und ε die Winkel, welche diese Parallele mit *BC* bzw. *AC* bildet, so gilt:
  $\varepsilon + \delta + \gamma = 180°$ **(WARUM?),**
  $\delta = \beta$ **(WARUM?),**
  $\varepsilon = \alpha$ **(WARUM?).**
- Also gilt:
  $\alpha + \beta + \gamma = 180°$,
  was zu beweisen war.



Analysieren Sie jeden Beweisschritt daraufhin, welche Voraussetzungen, anderen Sätze, Konstruktionen (deren Möglichkeit und Eindeutigkeit zu rechtfertigen ist) verwendet werden (siehe auch die grau gedruckten Fragen). Stellen Sie dadurch alle Tatsachen zusammen, auf denen der Innenwinkelsatz beruht.

LÖSUNG

– Wir konstruieren ***die*** Parallele zu *AB* durch den Punkt *C*. — **Dazu ist es notwendig, dass durch jeden Punkt zu jeder Geraden (die nicht durch den gegebenen Punkt verläuft) genau eine Parallele existiert.**

– Sind δ und ε die Winkel, welche diese Parallele mit *BC* bzw. *AC* bildet, so gilt:

– $\varepsilon + \delta + \gamma = 180°$ **Nebenwinkelsatz**

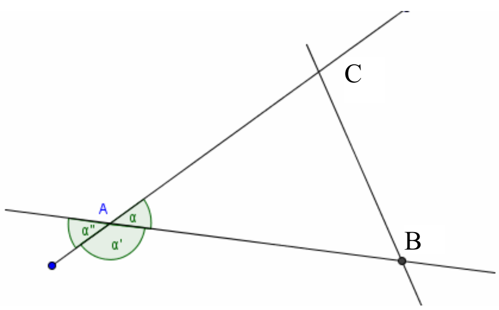
– $\delta = \beta$ **Wechselwinkelsatz**

– $\varepsilon = \alpha$ **Stufenwinkelsatz.**

Also gilt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, was zu beweisen war.

2. Lösen Sie die folgenden Schulbuchaufgaben. Geben Sie wiederum genau an, welche Sätze, Tatsachen und sonstigen Voraussetzungen Sie verwenden.

Schneiden sich drei Geraden in drei Punkten A, B und C, so entstehen insgesamt zwölf Winkel. Die drei Winkel α, β und γ kennt man als Innenwinkel des Dreiecks ABC. Die sechs Winkel α', α'', β', β'' und γ', γ'' bezeichnet man als Außenwinkel des Dreiecks ABC.



a) Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes über Nebenwinkel und des Satzes über die

Winkelsumme im Dreieck: Im Dreieck ist der Betrag eines Außenwinkels gleich der Summe der Beträge der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

b) Beweisen Sie mit Hilfe des letzten Satzes: Im Dreieck ist der Betrag eines Außenwinkels größer als der Betrag jedes nicht anliegenden Innenwinkels.

LÖSUNG – es werden die Bezeichnungen aus dem Schulbuch verwendet; mit w(α) ist die Winkelgröße / das Winkelmaß / der Betrag des Winkels α gemeint.

a) (1) Es gilt $\mathrm{w}(\alpha)+\mathrm{w}(\beta)+\mathrm{w}(\gamma)=180°$ **Innenwinkelsatz.**

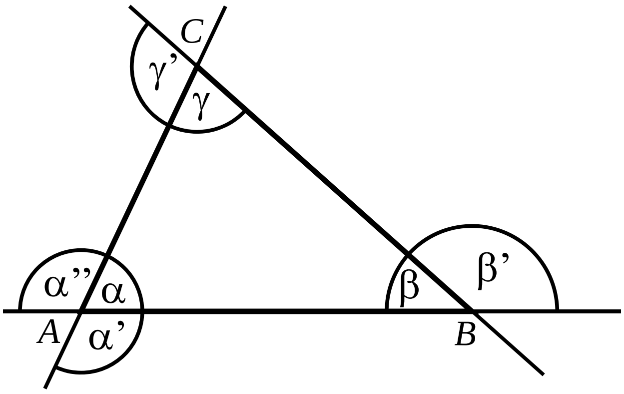
(2) Es gilt $\mathrm{w}(\alpha)+\mathrm{w}(\alpha')=180°$ **Nebenwinkelsatz**

(1') $\mathrm{w}(\beta)+\mathrm{w}(\gamma)=180°-\mathrm{w}(\alpha)$ Umstellen der Gleichung (1)

(2') $\mathrm{w}(\alpha')=180°-\mathrm{w}(\alpha)$ Umstellen der Gleichung (2)

Wegen (1') und (2') gilt die Behauptung $\mathrm{w}(\beta)+\mathrm{w}(\gamma)=\mathrm{w}(\alpha')$. Da der andere Außenwinkel bei A (α'') ein Scheitelwinkel zu α' ist, gilt $\mathrm{w}(\alpha'')=\mathrm{w}(\alpha')$, also auch $\mathrm{w}(\beta)+\mathrm{w}(\gamma)=\mathrm{w}(\alpha'')$.

Für die Behauptung bezüglich der anderen Winkel können die Beweise völlig analog (mit jeweils vertauschten Bezeichnungen) geführt werden.



b)

Da nach dem **Außenwinkelsatz** (siehe oben) der Betrag eines beliebigen Außenwinkels jeweils gleich der Summe der Beträge der beiden nicht anliegenden Innenwinkel ist und jeder Innenwinkel einen Betrag größer als Null hat, ist der Betrag des jeweils betrachteten Außenwinkels größer als der Betrag eines beliebigen nicht anliegenden Innenwinkel, z. B.:

$\mathrm{w}(\alpha')=\mathrm{w}(\beta)+\mathrm{w}(\gamma)$, $\mathrm{w}(\beta)>0, \mathrm{w}(\gamma)>0$

$\Rightarrow \mathrm{w}(\alpha')>\mathrm{w}(\beta)+\mathrm{w}(\gamma)-\mathrm{w}(\beta)=\mathrm{w}(\gamma)$ und

$\mathrm{w}(\alpha')>\mathrm{w}(\beta)+\mathrm{w}(\gamma)-\mathrm{w}(\gamma)=\mathrm{w}(\beta)$.

3. Beweisen Sie: In einem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

- Sei $ABCD$ ein Parallelogramm, E der Schnittpunkt der Diagonalen.
- $\angle(ABE) \equiv \angle(CDE)$ nach Wechselwinkelsatz
- $\angle(BAE) \equiv \angle(DCE)$ nach Wechselwinkelsatz
- $|AB| = |CD|$ da nach einem bekannten Satz gegenüberliegende Seiten im Parallelogramm gleich lang sind
- $\Rightarrow$ $\Delta ABE \equiv \Delta CDE$ nach dem Kongruenzsatz „wsw“
- $\Rightarrow$ $|BE| = |DE|$ und $|AE| = |CE|$, was zu beweisen war.