

5 Drehungen

5.1 Einordnung des Kapitels

Drehungen sind spezielle Bewegungen. In der Schule geht man von mechanischen Drehungen (Windmühlenflügeln, Riesenräder, Türen) aus, um eine Abbildungsvorschrift für den Bildpunkt eines Punktes bei einer Drehung um einen bestimmten Punkt Z zu erstellen: Du erhältst das Bild eines Punktes P bei einer Drehung um Z mit dem Drehwinkel α , indem du einen Kreis k um Z durch P zeichnest und dann den Winkel α an den Strahl ZP^+ anträgtst. Der freie Schenkel des angetragenen Winkels schneidet k in dem Punkt P' , dem Bild von P bei der Drehung um Z mit dem Drehwinkel α .

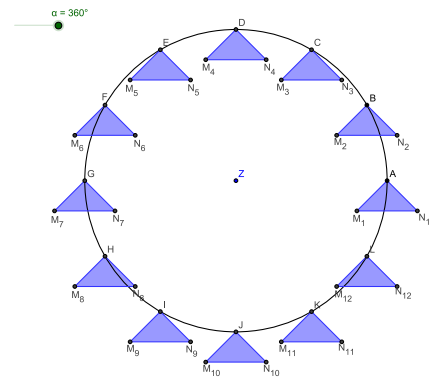


Abbildung 5.1: Riesenrad

Das Drehzentrum Z ist dabei ein Fixpunkt und dem Augenschein nach ist er wohl auch der einzige Fixpunkt bei einer Drehung um gerade dieses Drehzentrum. Mit dem Reduktionssatz wissen wir auch, dass jede Bewegung die NAF von zwei oder drei Geradenspiegelungen ist. Genau einen Fixpunkt Z hat die NAF zweier Geradenspiegelungen S_a und S_b , deren Spiegelachsen a und b sich in genau dem Punkt Z schneiden.

Unter diesen drei aufgezeigten Aspekten werden wir den Begriff der Drehung untersuchen:

- Drehungen um Z mit dem Drehwinkel α entsprechend der Behandlung im Mathematikunterricht der Schule,
- Drehungen als abstandserhaltende Abbildungen der Ebene auf sich mit genau einem Fixpunkt,
- Drehungen als Produkt zweier Geradenspiegelungen.

Alle drei Aspekte werden sich als zueinander äquivalent erweisen.

5.2 Drehungen im schulischen Mathematikunterricht

5.2.1 Reale Drehungen als Ansatz zur Erarbeitung der Abbildungsvorschrift

Aufgabe 5.1

Riesenrad

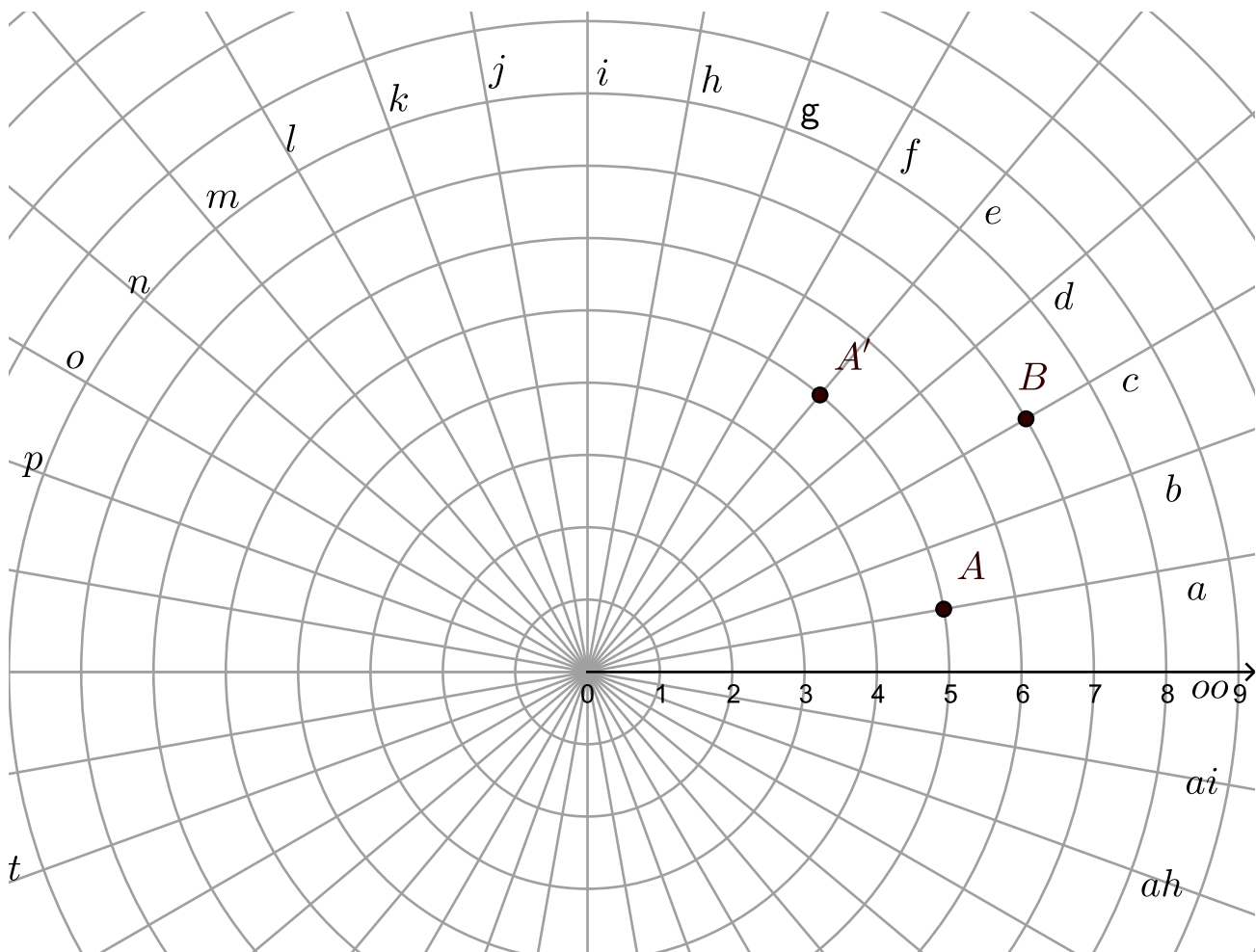
- Generieren Sie Aufgaben für eine 7. Klasse im Kontext der folgenden Geogebraanwendung: <https://www.geogebra.org/m/ejvuz7fp>.
- Die Punkte $M_i, i = 1 \dots 12$ und $N_j, j = 1 \dots 12$ bewegen sich auch auf Kreisen (s. Abb.

Riesenrad). Bestimmen Sie die Mittelpunkte dieser Kreise.

c) Begründen Sie, dass sich die Punkte M_1 und N_1 jeweils auch auf Kreisbahnen bewegen.

5.2.2 Polarkoordinatensysteme als didaktisches Hilfsmittel

Hilfreich zur Erarbeitung der Abbildungsvorschrift der Geradenspiegelung war das Koordinatenraster. Das entsprechende Raster für die Drehungen liefern sogenannte Polarkoordinatensysteme:



Durch die Bezeichnungen der Strahlen (Buchstaben) und der Kreise (Zahlen) lassen sich Punkte und deren Bilder bei einer Drehung um den Koordinatenursprung gut beschreiben.

Beispielaufgaben:

a) Der Punkt A liegt auf dem Strahl a und dem Kreis 5. Sein Bild A' bei der Drehung um das

Zentrum liegt auf dem Strahl e und dem Kreis 5 . Der Punkt B liegt auf dem Strahl c und dem Kreis 7. Wo liegt sein Bild B' , wenn er derselben Drehung wie A unterworfen wird?

- b) Zeichne den Punkt D mit den Koordinaten $(3, c)$ und sein Bild D' ein. (Wir gehen von derselben Drehung wie bei Aufgabe a) aus.)
- c) D' liegt bei $(w, 4)$. Wo befindet sich seine zugehöriger Originalpunkt. (Wir gehen von derselben Drehung wie bei Aufgabe a) aus.)

Aufgabe 5.2

Drehung mittels Polarkoordinaten erarbeiten

Sie haben vor, die Erarbeitung der Vorschrift zur Konstruktion des Bildes P' eines Punktes P bei einer Drehung um Z mit dem Drehwinkel α und vorgegebenem Drehsinn mittels eines Polarkoordinatensystems zu unterstützen. Klassifizieren Sie diesbezüglich wenigstens vier verschiedene Aufgabentypen und formulieren Sie zu jedem ihrer Typen drei Beispielaufgaben für den Einsatz in einer 7. Klasse einer Werkrealschule. Fassen Sie Ihre Aufgaben auf einem Arbeitsblatt im Format PDF zusammen und veröffentlichen Sie Ihr Arbeitsblatt im Wiki.

Weitere Rahmenbedingung: Die Arbeitsblätter müssen Polarkoordinatensysteme enthalten. Reale Zeichnungen, die fotografiert wurden sind nicht erlaubt. Alles rein digital.

Beispiel zur Lösung der Aufgabe:

Aufgabentyp 1: Originalpunkt und Bildpunkt sind im Polarkoordinatensystem gegeben. Der Drehwinkel ist zu bestimmen.

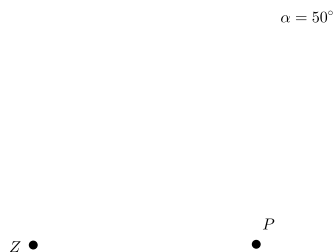
Beispielaufgabe: Bei einer Drehung um O wird A auf A' abgebildet. Wie groß ist der Drehwinkel?

5.2.3 Konstruktionsvorschrift bzw. operativ genetische Definition: Bild eines Punktes bei einer Drehung

Definition 5.1

Bild eines Punktes bei einer Drehung um einen Punkt

Es sei Z ein fester Punkt und P ein weiterer Punkt. Ferner sei α eine Winkelgröße. Außerdem gehen wir davon aus, dass wir einen Drehsinn (mathematisch positiv oder mathematisch negativ) festgelegt haben.



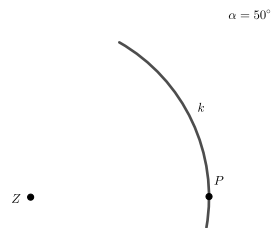
Wenn P mit Z zusammenfällt, dann ist Z selbst sein Bild bei der Drehung um Z mit dem Drehwinkel α und dem ausgezeichneten Drehsinn. (In den hier dargestellten Illustrationen wird der mathematisch positive Drehsinn verwendet.)

In der Regel wird P nicht mit Z zusammen fallen. Dann konstruierst du den Bildpunkt P' von P bei der Drehung um Z mit dem Drehwinkel α und dem ausgezeichneten Drehsinn nach der folgenden Vorschrift:

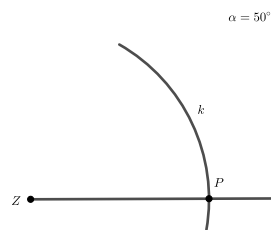
Nr. Konstruktionsschritt

Skizze

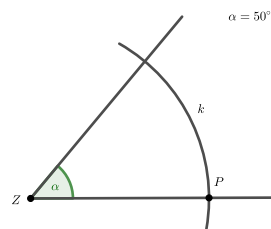
1. Zeichne einen Kreisbogen k um Z durch P .



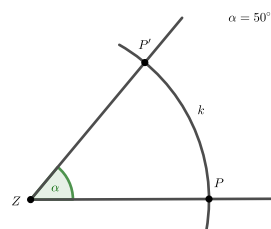
2. Zeichne den Strahl ZP^+ ein.



3. Trage an ZP^+ den Winkel α im vorgegeben Drehsinn ab.



4. Der Schnittpunkt des freien Schenkels des angetragenen Winkels mit dem Kreisbogen k ist der zu konstruierende Bildpunkt P' .

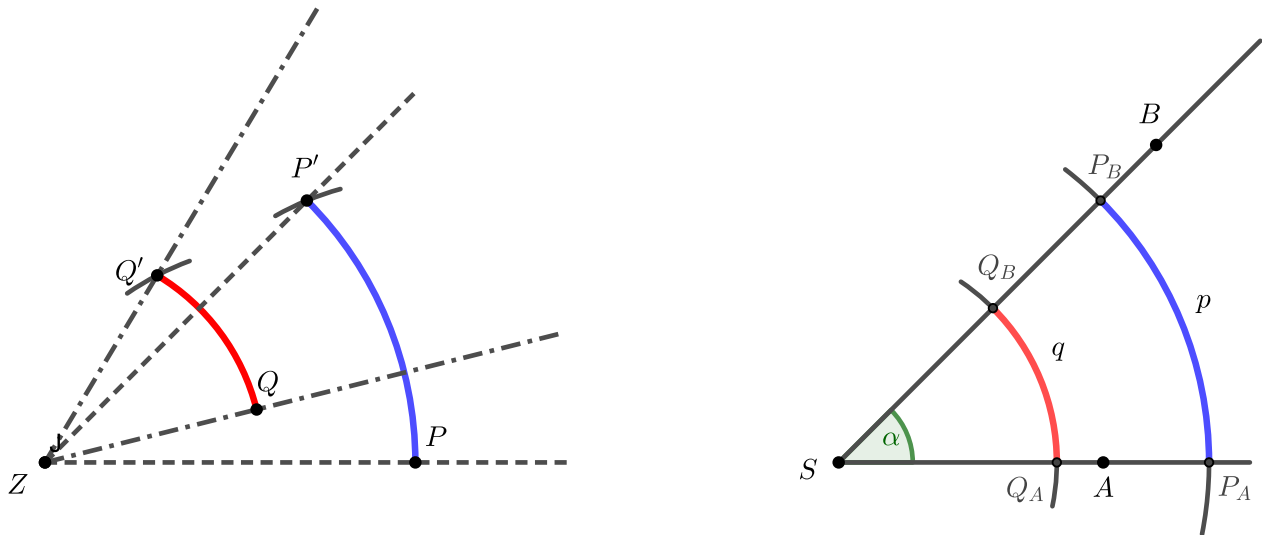


Aufgabe 5.3

Konstruktionsvorschrift ohne Winkelmesser

Wir gehen davon aus, dass der Drehwinkel α nicht durch seine Größe, sondern als konkret gezeichneter Winkel $\angle ASB$ vorgegeben ist. Formulieren Sie eine Konstruktionsvorschrift zur Konstruktion des Bildpunktes P' eines Punktes P bei einer Drehung um Z mit dem Drehwinkel $\angle ASB$. Der Drehsinn sei mathematisch positiv. Bei dem zu beschreibenden Kon-

onstruktionsverfahren darf die Winkelgröße nicht zahlenmäßig in Grad oder wie auch immer gemessen werden. Die folgende Skizze illustriert das Konstruktionsverfahren.



Abschließend formulieren wir Definition 5.1 als Konventionaldefinition:

Definition 5.2

Drehung, Schulvariante, mathematisch formal korrekt geschrieben

Es sei Z ein ausgezeichneter Punkt. Unter einer Drehung um Z versteht man eine Abbildung der Ebene auf sich für die gilt:

- Z wird auf sich selbst abgebildet.
- Für alle weiteren Punkte P, Q gilt:
 1. $|PZ| = |P'Z| \wedge |QZ| = |Q'Z|$,
 2. $\angle PZP' \cong \angle QZQ'$

Der gerichtete Winkel $\angle PZP' := \varphi$ heißt Drehwinkel der entsprechenden Drehung um Z . Für die entsprechenden Drehung schreiben wir kurz: $D_{Z,\varphi}$.

Aufgabe 5.4

Drehungen in der Sekundarstufe II (analytischen Geometrie)

In einem sogenannten Punktvektorraum lassen sich unter der Verwendung von Koordinaten,

Vektoren und Punkten Drehungen um den Koordinatenursprung mittels Matrizen vom Typ

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

schreiben.

a) Vollziehen Sie obige Aussage mit Geogebra nach, indem Sie zunächst in Geogebra einen Schieberegler φ generieren, der von $0^\circ \dots 360^\circ$ läuft. Die Drehmatrix M geben Sie dann mittels der folgenden Syntax ein: $M = \{\{\cos(\varphi), -\sin(\varphi)\}, \{\sin(\varphi), \cos(\varphi)\}\}$. Generieren Sie einen Punkt P und geben Sie dann $P' = M * P$ ein. Lassen Sie den Schieberegler φ laufen und den Punkt P' tracen.

b) Welche Drehung wird durch die folgende Matrix beschrieben: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$?

5.3 Drehungen als Bewegungen mit genau einem Fixpunkt

Definition 5.3

Drehung als Bewegung mit genau einem Fixpunkt

Eine Bewegung mit genau einem Fixpunkt heißt Drehung um diesen Fixpunkt.

5.4 Drehungen als NAF zweier Geadenspiegelungen

5.4.1 Im Fahrstuhl

Fahrstühle sind nicht gerade Orte in denen man gern verweilt. Insbesondere klaustrophobisch angehauchte Zeitgenossen haben ihre Probleme in den kleinen engen Kabinen. Um kleine Räume optisch zu vergrößern, arbeitet man mit Spiegeln. Aus diesen Gründen sind Aufzugskabinen häufig an drei Seiten mittels Spiegeln verkleidet. Wenn man aufmerksam in geeigneter Weise in die Spiegel schaut, bemerkt man eine Besonderheit, die mit der Nacheinanderausführung zweier Spiegelungen mit sich schneidenden Spiegelachsen zu tun hat. Die folgenden Bilder illustrieren den Sachverhalt. Sie wurden mit dem 3D-Raytracingprogramm PovRay (<http://www.povray.org/>) generiert.

In der Szene wurden nur zwei Spiegel und eine Kugel eingesetzt. Die Ansicht von oben zeigt das. Lassen Sie die Bilder auf sich wirken und vollziehen Sie das Experiment real mit zwei Spiegeln bzw. dem

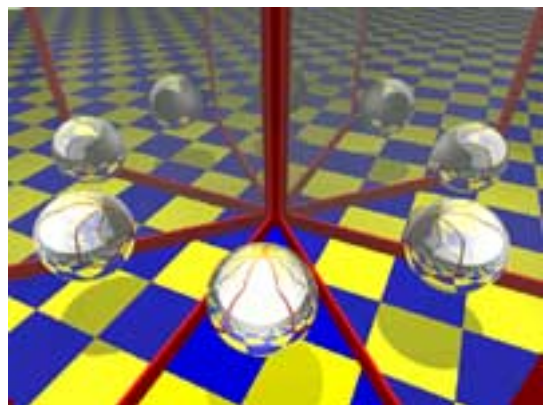


Abbildung 5.2: Kamera blickt in die Spiegel

digitalen Zeitalter entsprechend mit zwei Fotohandys nach.

Aufgabe 5.5

Zwei Spiegelungen

Zeichnen Sie in ein kartesisches Koordinatensystem die Geraden g und h , die durch die Gleichungen

$$y = \frac{1}{2}x$$

$$y = -2x$$

beschrieben werden.

Zeichnen Sie die Punkte

$$A = (3, -2)$$

$$B = (5, -2)$$

$$C = (5, -4)$$

ein und bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte A'', B'', C'' einmal für $S_g \circ S_h$ und einmal für $S_h \circ S_g$.

Wenden Sie dann die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

auf die Koordinatenpaare der Punkte A, B, C an. Kommentieren Sie Ihre Beobachtungen.

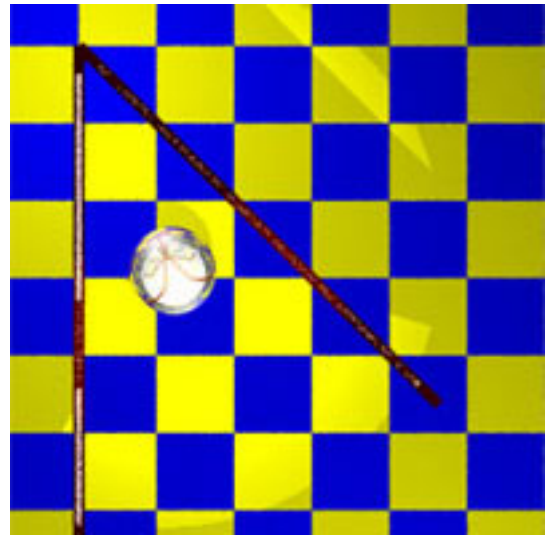


Abbildung 5.3: Kamera blickt von oben auf die Szene

5.4.2 Die NAF zweier Geradenspiegelungen mit sich schneidenden Spiegelachsen

Satz 5.1

Die NAF zweier Spiegelungen mit sich schneidenden Spiegelachsen ist ein Drehung

Es seien S_g und S_h zwei Geradenspiegelungen.

$$g \cap h = \{Z\} \Rightarrow S_g \circ S_h = D_{Z, 2|\angle g, h}$$

Satz 5.2

Ersetzung einer Drehung durch zwei Geradenspiegelungen

Es sei $D_{Z, \varphi}$ eine Drehung.

$$\exists s, h : S_g \circ S_h = D_{Z, \varphi}$$

Beweis: Beide Beweise sind das Programm für die Sitzung am 26. Mai.

Sie können sich gern schon mal probieren. Nach dem Beweis des Reduktionssatzes sollte zumindest Satz 5.2 kein Problem sein.