Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 10

(Lösungen)

1. Beweisen Sie: Das Innere eines Winkels ist konvex.

Lösung: *Voraussetzung:* R und Q seien zwei Punkte im Inneren des Winkels $\angle ASB$.
Behauptung: $\overline{RQ}$ liegt vollständig im Inneren des Winkels $\angle ASB$.

Beweis: siehe vervollständigte Tabelle.

Beweisschritt	Begründung
1. Punkte R und Q liegen im Inneren des Winkels $\angle ASB$	Nach Vorraussetzung.
2. $R \in ASB^+$ und $Q \in ASB^+$	Definition des Inneren eines Winkels (Schnittmengen von Halbebenen)
3. $\overline{RQ} \subset ASB^+$	Halbebenen sind konvex
4. $R \in BSA^+$ $Q \in BSA^+$	Definition des Inneren eines Winkels
5. $\overline{RQ} \subset BSA^+$	Halbebenen sind konvex
6. $\overline{RQ} \subset ASB^+ \cap BSA^+$	Aus 3. und 5.
7. $\overline{RQ}$ liegt im Inneren des Winkels $\angle ASB$.	Definition des Inneren eines Winkels.

2. Beweisen Sie: Jeder Winkel besitzt genau eine Winkelhalbierende.

Lösung:

(a) **Existenz der Winkelhalbierenden:** Gegeben sei ein beliebiger Winkel $\angle ASB$. Es ist zu zeigen, dass es einen Strahl SP^+ gibt, so dass $|\angle SA^+SP^+| + |\angle SP^+SB^+| = |\angle ASB|$ und $|\angle AS^+SP^+| = |\angle SP^+SB^+|$ gilt. Nach Axiom W1 ist $|\angle ASB|$ eine reelle Zahl zwischen 0 und 180. Demzufolge ist $\frac{|\angle ASB|}{2}$ ebenfalls eine reelle Zahl zwischen 0 und 180. Axiom W2 liefert uns in der Halbebene ASB^+ einen Strahl SP^+ so, dass $|\angle SA^+SP^+| = \frac{|\angle ASB|}{2}$ gilt. Wenn wir zeigen könnten, dass der Punkt P im Inneren des Winkels liegt, wären wir im Prinzip fertig. Dann würde nämlich nach Axiom W3 $|\angle AS^+SP^+| + |\angle SP^+SB^+| = |\angle ASB|$ folgen. Unter Berücksichtigung von $|\angle SA^+SP^+| = \frac{|\angle ASB|}{2}$, wäre dann auch $|\angle SP^+SB^+| = \frac{|\angle ASB|}{2}$ und somit $|\angle SA^+SP^+| = |\angle SP^+SB^+|$.

Um zu zeigen, dass P ein Punkt im Inneren ist, führen wir den Beweis indirekt. Wir nehmen also an, dass der Punkt P nicht im Inneren des Winkels $\angle ASB$ liegt. In diesem Fall wäre der Punkt B ein Punkt im Inneren des Winkels $\angle ASP$. Nach Satz „Gegeben seien drei Strahlen p, q und r, die in ein und derselben Ebene liegen und den gemeinsamen Anfangspunkt S haben. Wenn der Strahl r innerhalb des Winkels $\angle pq$ liegt, dann sind die Winkel $\angle pr$ und $\angle rq$ kleiner als der Winkel $\angle pq$." müsste jetzt $|\angle ASB| < |\angle ASP|$ sein. Das ist jedoch ein Widerspruch zu $|\angle ASP| = \frac{|\angle ASB|}{2} < |\angle ASB|$. Die Annahme, dass P nicht im Inneren des Winkels $\angle ASB$ liegt, ist also zu verwerfen. Die Existenz der Winkelhalbierenden zu einem beliebigen Winkel ist somit gezeigt.

(b) **Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden:** Um die Eindeutigkeit der Winkelhalbierende zu zeigen, nehmen wir an, dass zu einem Winkel $\angle pq$ zwei verschiedene Winkelhalbierende w_1 und w_2 existieren. Die Winkel $\angle pw_1$ und $\angle pw_2$ hätten dann das gleiche Maß und zwar $\frac{|\angle pq|}{2}$. Nach Axiom W2 können die beiden Strahlen w_1 und w_2 nicht verschieden sein. Also ist unsere Annahme zu verwerfen. Die Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden ist somit bewiesen.

3. Beweisen Sie: Wenn α und β zwei Scheitelwinkel sind, dann haben α und β dieselbe Größe.

Es sei $\alpha = \langle p^+q^+$ und damit $\beta = \langle p^-q^-$ der Scheitelwinkel von α.
Der Winkel $\gamma = \langle q^+p^-$ ist dann Nebenwinkel sowohl von α als auch von β.
Nach Axiom IV/4 gelten die folgenden beiden Gleichungen:
$|\alpha| + |\gamma| = 180,\ |\beta| + |\gamma| = 180$
Aus diesen beiden Gleichungen folgt unmittelbar $|\alpha| = |\beta|$, was letztlich zu beweisen war.

4. Beweisen Sie: Es gibt rechte Winkel und jeder rechte Winkel hat das Maß 90.

Existenz eines rechten Winkels:
Es sei AB^+ ein Strahl auf dem Träger der Halbebene h. Nach Axiom IV/2 gibt es in h genau einen Strahl AC^+ derart, dass das Maß des Winkels $\langle AB^+AC^+$ die Zahl 90 ist.
Nun sind die Winkel $\langle AB^+AC^+$ und $\langle AB^-AC^+$ Nebenwinkel und somit nach Axiom IV/4 supplementär. Hieraus folgt nach Definition IV/4 $|\langle AB^+AC^+| + |\langle AB^-AC^+| = 180$
Damit ist wegen $|\langle AB^+AC^+| = 90$ das Maß des Winkels $\langle AB^-AC^+$ auch 90.

Damit haben die beiden Nebenwinkel $\langle AB^{+}AC^{+}$ und $\langle AB^{-}AC^{+}$ beide dasselbe Maß und sind somit nach Definition V/5 rechte Winkel.
Somit haben wir bewiesen, dass es rechte Winkel gibt.

Es bleibt zu zeigen, dass die Größe eines jeden rechten Winkels 90 ist:

Es seien α und β zwei Nebenwinkel mit $|\alpha| = |\beta|$. Nach dem Axiom IV/4 sind α und β supplementär, was $|\alpha| + |\beta| = 180$ bedeutet. Die Winkel α und β sind rechte Winkel und haben damit dieselbe Größe. Damit gilt $|\alpha| = |\beta| = \frac{180}{2} = 90$.

5. Wir setzten voraus, dass wir Geometrie in einer Ebene betreiben. Gegeben seien eine Gerade und ein Punkt auf dieser Geraden. Beweisen Sie, dass es genau eine Senkrechte zu dieser Geraden gibt, die durch den gegebenen Punkt geht.

Lösung:
Es sei g eine Gerade und P ein Punkt auf g. Q sei ein Punkt, der nicht zu g gehört. A sei ein weiterer Punkt, der zu g gehört.
<u>Existenz und Eindeutigkeit der Senkrechten s zu g durch den Punkt P:</u>
Wir betrachten die Halbebene gQ^{+}. Nach Axiom W/2 gibt es jetzt in gQ^{+} genau einen Strahl h mit dem Anfangspunkt P derart, dass $|\angle PA^{+}h| = 90$ gilt.
Die Gerade, die durch h und seinen entgegengesetzten Strahl gebildet wird, ist die gesuchte Senkrechte s. Ihre Eindeutigkeit ergibt sich aus der Eindeutigkeit des Strahls h.