

4 Der Reduktionssatz

4.1 Der Satz

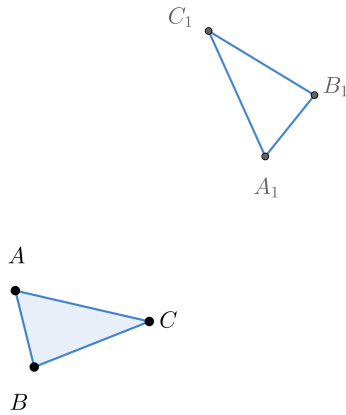
Satz 4.1

Reduktionssatz

Jede Bewegung ist die Nacheinanderausführung von zwei oder drei Geradenspiegelungen.

4.2 Der Beweis

Wir wissen bereits, dass jede Bewegung durch drei nicht kollineare Punkte und deren Bilder eindeutig bestimmt ist.



Es seien also \overline{ABC} drei nichtkollineare Punkte und $\overline{A_1, B_1, C_1}$ deren Bilder bei der Bewegung β .

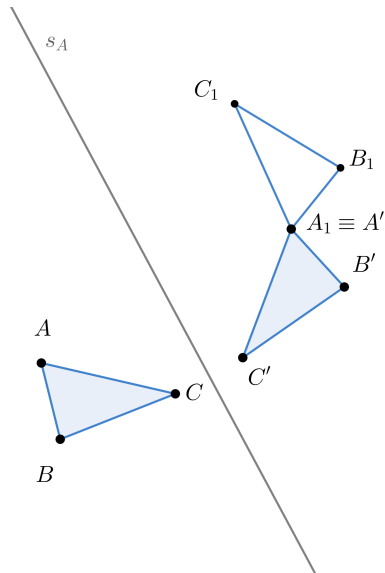
4.2.1 Schritt 1: Spiegelung an der Mittelsenkrechten s_A von $\overline{A, A_1}$

Wir wählen die Mittelsenkrechte von $\overline{AA_1}$ und nennen sie s_A . Bei der Spiegelung S_{s_A} werden die Punkte A, B, C auf ihre Bilder abgebildet:

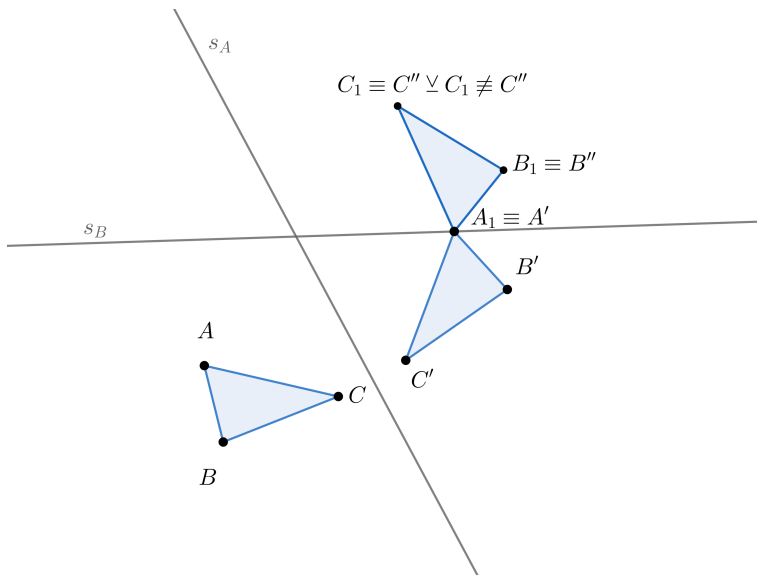
$$A \xrightarrow{S_{s_A}} A' \equiv A_1$$

$$B \xrightarrow{S_{s_A}} B'$$

$$C \xrightarrow{S_{s_A}} C'$$



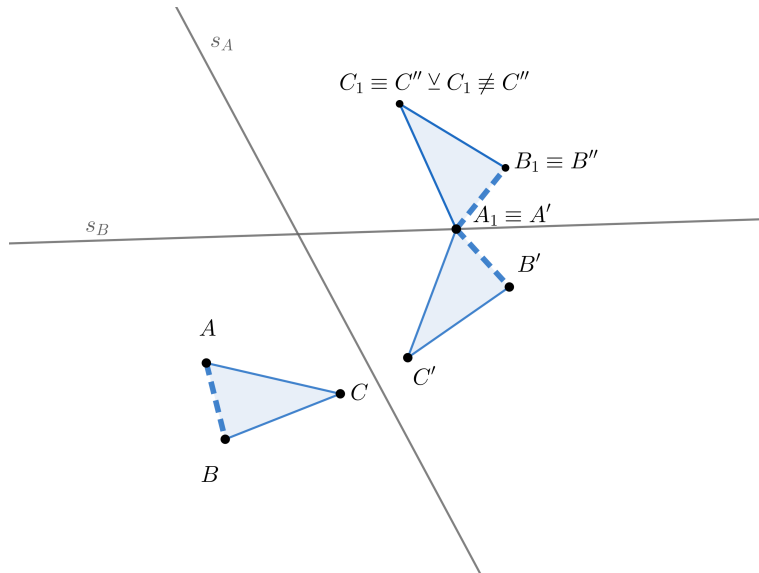
4.2.2 Schritt 2: Spiegelung an der Mittelsenkrechten s_B von $\overline{B'B_1}$



Wir wählen die Mittelsenkrechte von $\overline{B'B_1}$ und nennen sie s_B . Bei der Spiegelung S_{s_B} werden die Punkte $A' \equiv A_1, B', C'$ auf ihre Bilder abgebildet:

$$\begin{aligned}
 A' \equiv A_1 &\xrightarrow{S_{s_B}} A'' \equiv A' \equiv A_1 \\
 B' &\xrightarrow{S_{s_B}} B'' \equiv B_1 \\
 C' &\xrightarrow{S_{s_B}} C'' \text{ mit entweder } C'' \equiv C_1 \vee C'' \neq C_1
 \end{aligned}$$

4.2.3 Schritt 3: Nachweis, dass die Mittelsenkrechte s_B von $\overline{B'}, B_1$ durch $A' \equiv A_1$ geht und damit A' bei S_{s_B} auf sich selbst abgebildet wird.



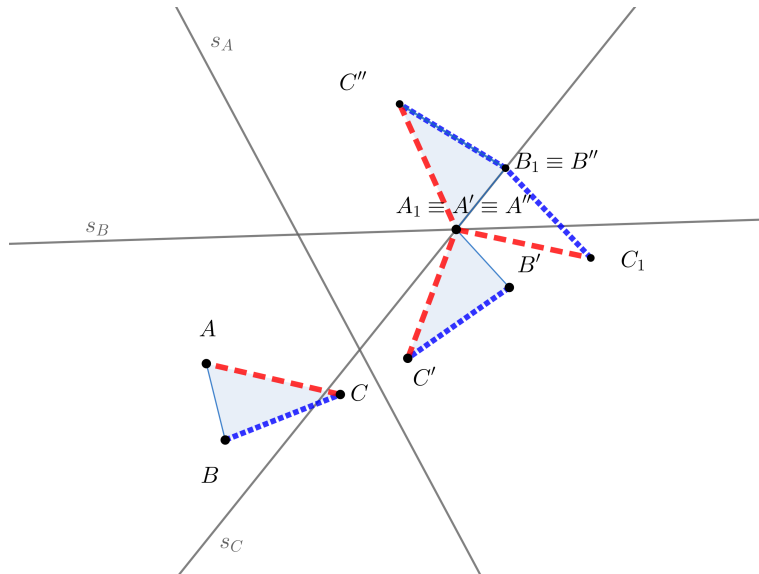
- (I) $\overline{AB} \cong \overline{A_1B_1}$ β ist eine Bewegung und damit abstandserhaltend.
- (II) $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ S_{s_A} ist Spiegelung und damit abstandserhaltend.
- (III) $\overline{A_1B_1} \cong \overline{A'B'}$ (I), (II), „Drittengleichheit“.
- (IV) $A_1 \equiv A' \in s_B$ (III), Mittelsenkrechtenkriterium.

Bezüglich der Bilder von A gilt dementsprechend:

$$A \xrightarrow{S_{s_A}} A' \equiv A_1 \xrightarrow{S_{s_B}} A'' \equiv A' \equiv A$$

Sollte jetzt $C'' \equiv C_1$ sein, sind wir fertig. Es wurden zwei Spiegelungen benötigt, um \overline{ABC} auf $\overline{A_1B_1C_1}$ abzubilden. Sollte $C'' \neq C_1$ gelten, brauchen wir eine weitere Geradenspiegelung um das gewünschte Ziele zu erreichen.

4.2.4 Schritt 4: Falls $C'' \neq C_1$ leistet die Spiegelung an A_1B_1 das Verlangte



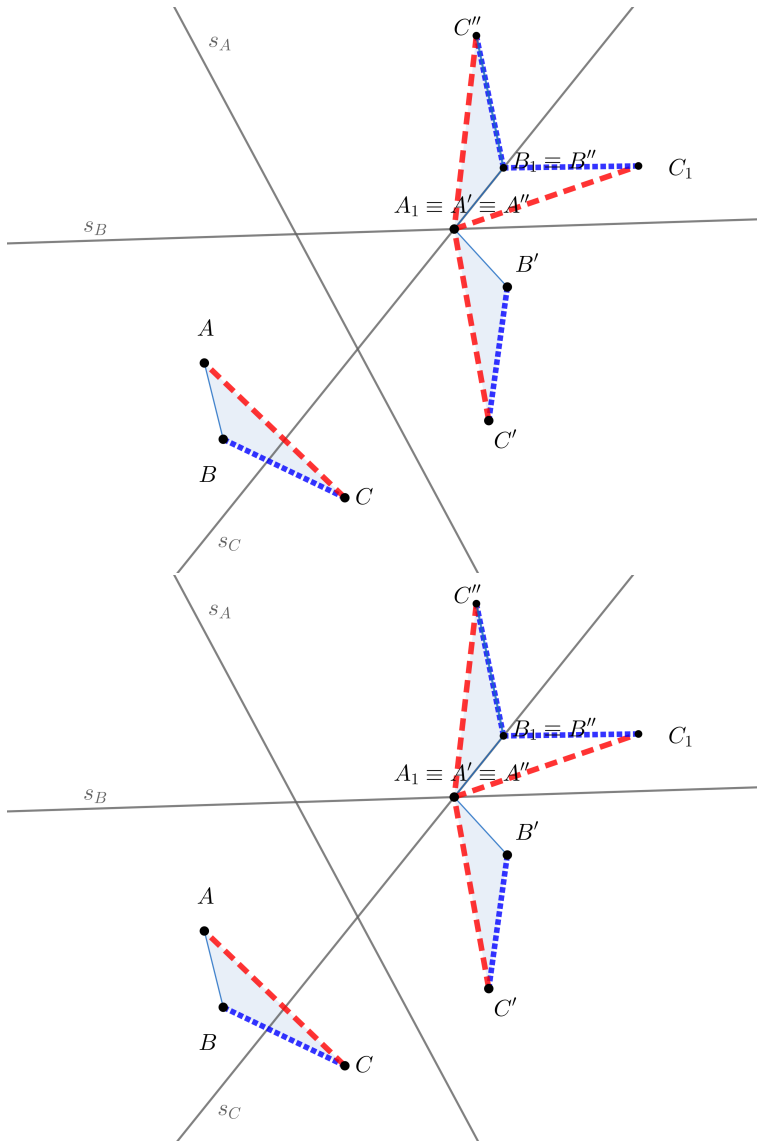
Sollte C durch die NAF $S_{s_A} \circ S_{s_B}$ nicht auf C_1 abgebildet worden sein, ist die Gerade A_1C_1 die Mittelsenkrechte von $\overline{C''C_1}$.

- (I) $\overline{AC} \cong \overline{A''C''}$ $\overline{AC} \xrightarrow{S_{s_A} \circ S_{s_B}} \overline{A''C''}$, Abstandserhaltung der Spiegelungen.
- (II) $\overline{AC} \cong \overline{A_1C_1}$ Bewegungen sind abstandserhaltend
- (III) $\overline{A_1C_1} \cong \overline{A''C''}$ (I),(II), beachte ferner $A'' \equiv A_1$
- (IV) $\overline{BC} \cong \overline{B''C''}$ $\overline{BC} \xrightarrow{S_{s_A} \circ S_{s_B}} \overline{B''C''}$, Abstandserhaltung der Spiegelungen.
- (V) $\overline{BC} \cong \overline{B_1C_1}$ Bewegungen sind abstandserhaltend
- (VI) $\overline{B_1C_1} \cong \overline{B''C''}$ (IV),(V), beachte ferner $B'' \equiv B_1$
- (VII) A_1B_1 ist MS von $\overline{C''C_1}$ (III), (VI), Mittelsenkrechtenkriterium
- (VIII) $C'' \xrightarrow{S_{A_1B_1}} C_1$ (VII)

4.2.5 Schritt 5: Was ist mit den anderen Punkten der Ebene?

Alle Spiegelgeraden sind eindeutig durch die beiden Punkte A und B und deren Bilder bestimmt. Wegen der Abstandserhaltungen muss jetzt jeder beliebige andere Punkt C durch die zwei bzw. drei Spiegelungen auf sein Bild C_1 bei der Bewegung β abgebildet werden. Einfacher gesehen:

Unser Beweis wäre etwa für die folgenden Konstellationen der drei Punkte der Ebene gewesen:



4.3 Übungsaufgaben zum Reduktionsatz

Aufgabe 4.1

Experimentieren

Experimentieren Sie mit der folgenden Geogebra-Datei:

<https://www.geogebra.org/m/azkp4rka>.

Aufgabe 4.2

Den Beweis falten

Öffnen Sie <http://geometrie.zum.de/wiki/Datei:ReduktionssatzBeweisFalten.svg>.

Drucken Sie die Grafik aus und vollziehen Sie den Beweis des Reduktionssatzes durch Falten des ausgedruckten Blattes nach. Fotografieren Sie Ihr Ergebnis und laden Sie die Bilder auf die folgende Adresse ins Wiki:

http://geometrie.zum.de/wiki/Der_gefaltete_Reduktionssatz

Aufgabe 4.3

drei oder zwei?

Formulieren Sie eine Regel, wann eine Bewegung durch zwei und wann sie durch drei Geradenspiegelungen ersetzbar ist.