5 Drehungen Teil I, Sitzung vom 19. Mai 2020

5.1 Einordnung des Kapitels

Drehungen sind spezielle Bewegungen. In der Schule geht man von mechanischen Drehungen (Windmühlenflügeln, Riesenräder, Türen) aus, um eine Abbildungsvorschrift für den Bildpunkt eines Punktes bei einer Drehung um einen bestimmten Punkt Z zu erstellen: Du erhälst das Bild eines Punktes P bei einer Drehung um Z mit dem Drehwinkel α, indem du einen Kreis k um Z durch P zeichnest und dann den Winkel α an den Strahl ZP^+ anträgst. Der freie Schenkel des angetragenen Winkels schneidet k in dem Punkt P', dem Bild von P bei der Drehung um Z mit dem Drehwinkel α.

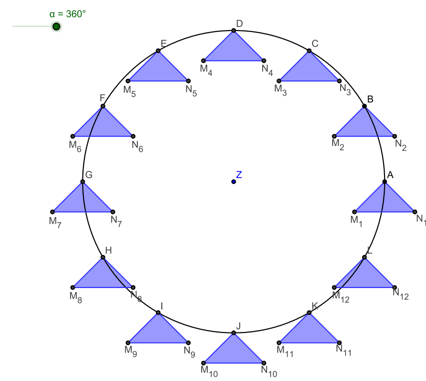


Abbildung 5.1: Riesenrad

Das Drehzentrum Z ist dabei ein Fixpunkt und dem Augenschein nach ist er wohl auch der einzige Fixpunkt bei einer Drehung um gerade dieses Drehzentrum. Mit dem Reduktionssatz wissen wir auch, dass jede Bewegung die NAF von zwei oder drei Geradenspiegelungen ist. Genau einen Fixpunkt Z hat die NAF zweier Geradenspiegelungen S_a und S_b, deren Spiegelachsen a und b sich in genau dem Punkt Z schneiden.

Unter diesen drei aufgezeigten Aspekten werden wir den Begriff der Drehung untersuchen:

(a) Drehungen um Z mit dem Drehwinkel α entsprechend der Behandlung im Mathematikunterricht der Schule,

(b) Drehungen als abstandserhaltende Abbildungen der Ebene auf sich mit genau einem Fixpunkt,

(c) Drehungen als Produkt zweier Geradenspiegelungen.

Alle drei Aspekte werden sich als zueinander äquivalent erweisen.

5.2 Drehungen im schulischen Mathematikunterricht

5.2.1 Reale Drehungen als Ansatz zur Erarbeitung der Abbildungsvorschrift

Aufgabe 5.1

Riesenrad

a) *Generieren Sie Aufgaben für eine 7. Klasse im Kontext der folgenden Geogebraanwendung:* `https://www.geogebra.org/m/ejvuz7fp`.

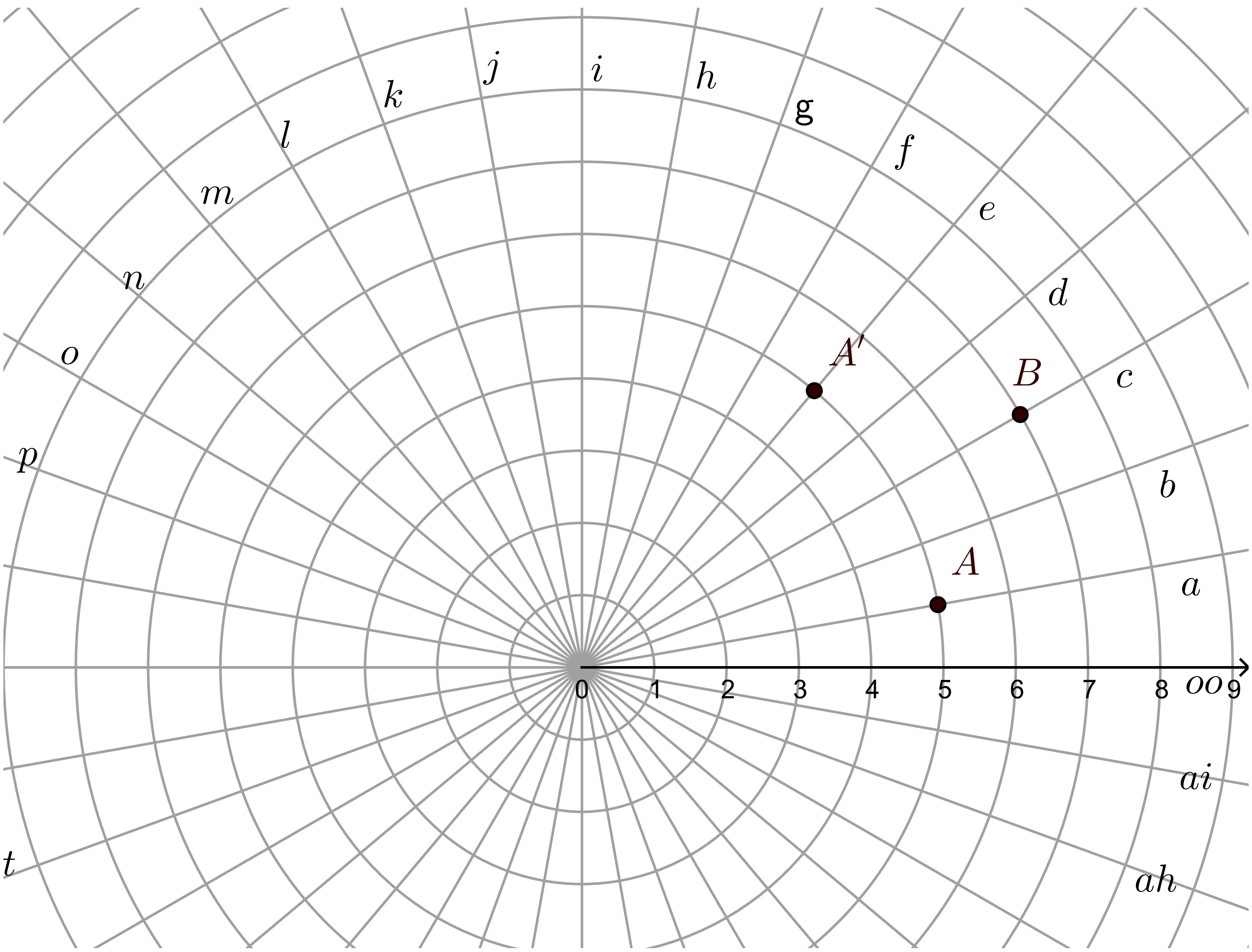
b) *Die Punkte $M_i, i = 1 \dots 12$ und $N_j, j = 1 \dots 12$ bewegen sich auch auf Kreisen (s. Abb.*

Riesenrad). Bestimmen Sie die Mittelpunkte dieser Kreise.

c) *Begründen Sie, dass sich die Punkte M_1 und N_1 jeweils auch auf Kreisbahnen bewegen.*

5.2.2 Polarkoordinatensysteme als didaktisches Hilfsmittel

Hilfreich zur Erarbeitung der Abbildungsvorschrift der Geradenspiegelung war das Koordinatenraster. Das entsprechende Raster für die Drehungen liefern sogenannte Polarkoordinatensysteme:



Durch die Bezeichnungen der Strahlen (Buchstaben) und der Kreise (Zahlen) lassen sich Punkte und deren Bilder bei einer Drehung um den Koordinatenursprung gut beschreiben.

Beispielaufgaben:

a) Der Punkt A liegt auf dem Strahl a und dem Kreis 5. Sein Bild A' bei der Drehung um das

Zentrum liegt auf dem Strahl e und dem Kreis 5 . Der Punkt B liegt auf dem Strahl c und dem Kreis 7. Wo liegt sein Bild B', wenn er derselben Drehung wie A unterworfen wird?

b) Zeichne den Punkt D mit den Koordinaten $(3, c)$ und sein Bild D' ein.(Wir gehen von derselben Drehung wie bei Aufgabe a) aus.)

c) D' liegt bei $(w, 4)$. Wo befindet sich seine zugehöriger Originalpunkt.(Wir gehen von derselben Drehung wie bei Aufgabe a) aus.)

Aufgabe 5.2

Drehung mittels Polarkoordinaten erabeiten
Sie haben vor, die Erarbeitung der Vorschrift zur Konstruktion des Bildes P' eines Punktes P bei einer Drehung um Z mit dem Drehwinkel α und vorgegebnem Drehsinn mittels eines Polarkoordinatensystems zu unterstützen. Klassifizieren Sie diesbezüglich wenigstens vier verschiedene Aufgabentypen und formulieren Sie zu jedem ihrer Typen drei Beispielaufgaben für den Einsatz in einer 7. Klasse einer Werkrealschule. Fassen Sie Ihre Aufgaben auf einem Arbeitsblatt im Format PDF zusammen und veröffentlichen Sie Ihr Arbeitsblatt im Wiki. Weitere Rahmenbedingung: Die Arbeitsblätter müssen Polarkoordinatensysteme enthalten. Reale Zeichnungen, die fotografiert wurden sind nicht erlaubt. Alles rein digital.

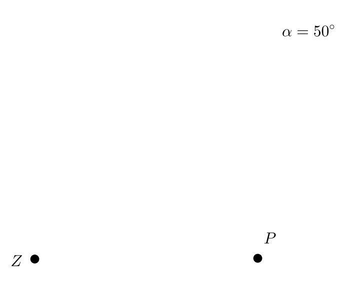
Beispiel zur Lösung der Aufgabe:

Aufgabentyp 1: Orginalpunkt und Bildpunkt sind im Polarkoordinatensystem gegeben. Der Drehwinkel ist zu bestimmen.
Beispielaufgabe: Bei einer Drehung um O wird A auf A' abgebildet. Wir groß ist der Drehwinkel?

5.2.3 Konstruktionsvorschrift bzw. operativ genetische Definition: Bild eines Punktes bei einer Drehung

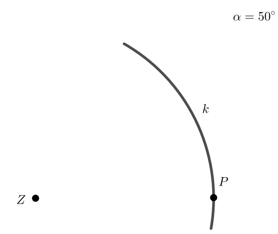
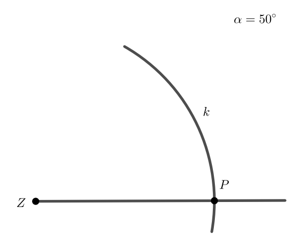
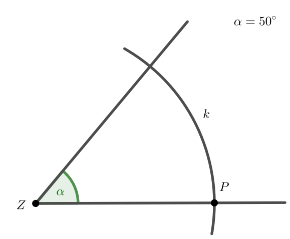
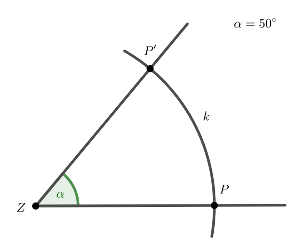
Definition 5.1

Bild eines Punktes bei einer Drehung um einen Punkt
Es sei Z ein fester Punkt und P ein weiterer Punkt. Ferner sei α eine Winkelgröße. Außerdem gehen wir davon aus, dass wir einen Drehsinn (mathematisch positiv oder mathematisch negativ) festgelegt haben.



Wenn P mit Z zusammenfällt, dann ist Z selbst sein Bild bei der Drehung um Z mit dem Drehwinkel α und dem ausgezeichneten Drehsinn. (In den hier dargestellten Illustrationen wird der mathematisch positive Drehsinn verwendet.)

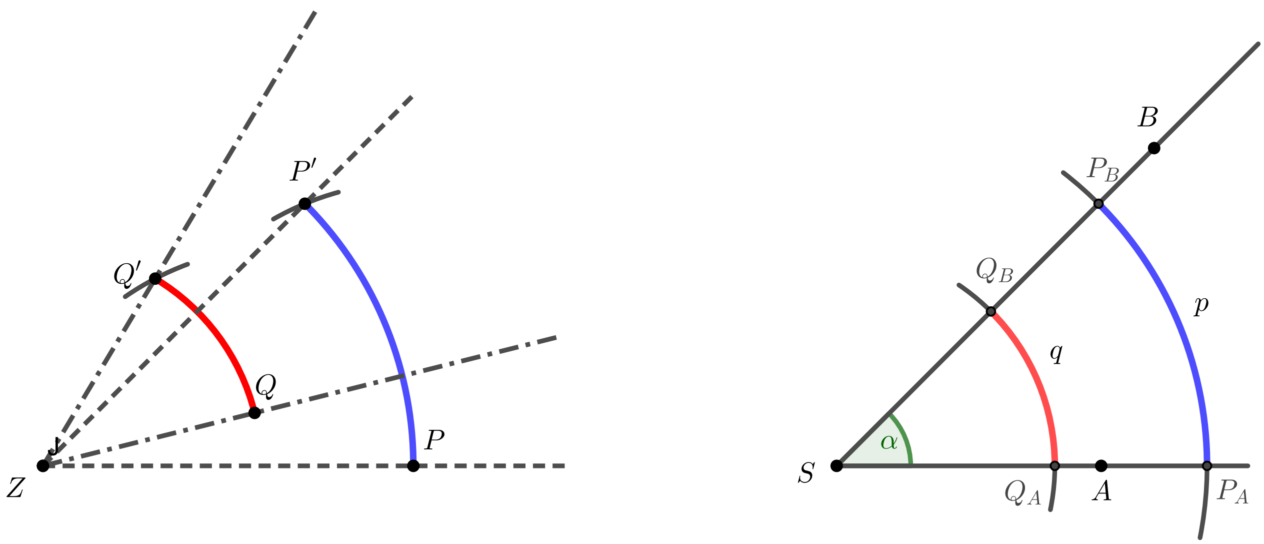
In der Regel wird P nicht mit Z zusammen fallen. Dann konstruierst du den BildpunktP' von P bei der Drehung um Z mit dem Drehwinkel α und dem ausgezeichneten Drehsinn nach der folgenden Vorschrift:

Nr.	*Konstruktionsschritt*	*Skizze*
1.	*Zeichne einen Kreisbogen k um Z durch P.*	
2.	*Zeichne den Strahl ZP^+ ein.*	
3.	*Trage an ZP^+ den Winkel α im vorgegeben Drehsinn ab.*	
4.	*Der Schnittpunkt des freien Schenkels des angetragenen Winkels mit dem Kreisbogen k ist der zu konstruierende Bildpunkt P'.*	

Aufgabe 5.3

Konstruktionsvorschrift ohne Winkelmesser
Wir gehen davon aus, dass der Drehwinkel α nicht durch seine Größe, sondern als konkret gezeichneter Winkel $\angle ASB$ vorgegeben ist. Formulieren Sie eine Konstruktionsvorschrift zur Konstruktion des Bildpunktes P' eines Punktes P bei einer Drehung um Z mit dem Drehwinkel $\angle ASB$. Der Drehsinn sei mathematisch positiv. Bei dem zu beschreibenden Kon-

struktionsverfahren darf die Winkelgröße nicht zahlenmäßig in Grad oder wie auch immer gemessen werden. Die folgende Skizze illustriert das Konstruktionsverfahren.



Abschließend formulieren wir Definition 5.1 als Konventionaldefinition:

Definition 5.2

Drehung, Schulvariante, mathematisch formal korrekt geschrieben
Es sei Z ein ausgezeichneter Punkt. Unter einer Drehung um Z versteht man eine Abbildung der Ebene auf sich für die gilt:

- *Z wird auf sich selbst abgebildet.*
- *Für alle weiteren Punkte P, Q gilt:*
  1. $|PZ| = |P'Z| \wedge |QZ| = |Q'Z|$,
  2. $\angle PZP' \cong \angle QZQ'$

Der gerichtete Winkel $\angle PZP' := \varphi$ heißt Drehwinkel der entsprechenden Drehung um Z. Für die entsprechenden Drehung schreiben wir kurz: $D_{Z,\varphi}$.

Aufgabe 5.4

Drehungen in der Sekundarstufe II (analytischen Geometrie)
In einem sogenannten Punktvektorraum lassen sich unter der Verwendung von Koordinaten,

Vektoren und Punkten Drehungen um den Koordinatenursprung mittels Matrizen vom Typ

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

schreiben.

a) *Vollziehen Sie obige Aussage mit Geogebra nach, indem Sie zunächst in Geogebra einen Schieberegler φ generieren, der von $0° \dots 360°$ läuft. Die Drehmatrix M geben Sie dann mittels der folgenden Sytax ein: $M = \{\{\cos(\varphi), -\sin(\varphi)\}, \{\sin(\varphi), \cos(\varphi)\}\}$. Generieren Sie einen Punkt P und geben Sie dann $P' = M * P$ ein. Lassen Sie den Schieberegler φ laufen und den Punkt P' tracen.*

b) *Welche Drehung wird durch die folgende Matrix beschrieben:* $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$*?*

6 Drehungen Teil II, Sitzung vom 26. Mai 2020

6.1 Drehungen als Bewegungen mit genau einem Fixpunkt

Definition 6.1

Drehung als Bewegung mit genau einem Fixpunkt
Eine Bewegung mit genau einem Fixpunkt heißt Drehung um diesen Fixpunkt.

Satz 6.1

Aus Definition 5.2 folgt Definition 6.1
Jede Drehung im Sinne von Definition 5.2 ist eine Bewegung mit genau einem Fixpunkt.

Beweis:

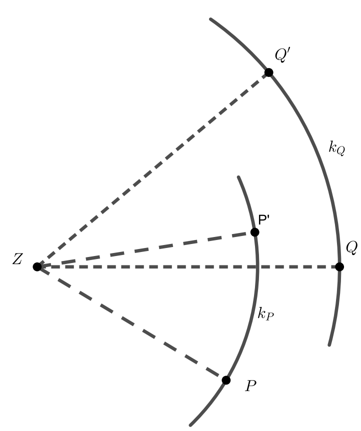
Es sei $D_{Z,\alpha}$ eine Drehung entsprechend Definition 3.2.

Voraussetzung 1:	$Z \equiv Z'$
Voraussetzung 2:	$\forall P \not\equiv Z : \overline{PZ} \cong \overline{P'Z}$
Voraussetzung 3:	$\forall P \not\equiv Z : \lvert\angle PZP'\rvert = \alpha$
Behauptung 1:	$D_{Z,\alpha}$ hat genau einen Fixpunkt.
Behauptung 2:	$D_{Z,\alpha}$ ist eine Abbildung der Ebene auf sich.
Behauptung 3:	$D_{Z,\alpha}$ ist abstandserhaltend, d.h. $\forall P, Q : \overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$.

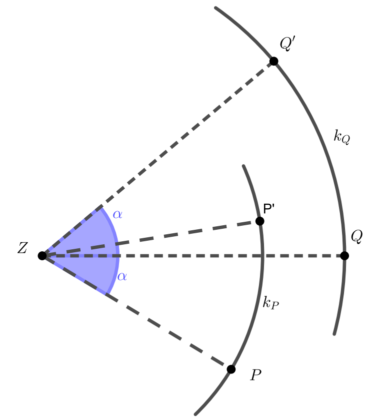
Die Identität ist ein Spezialfall der Drehungen und bleibt bei den folgenden Betrachtungen außen vor.

- Der Beweis für Behauptung 1 ist trivial. Ebenso folgt Behauptung 2 unmittelbar aus Definition 5.2.

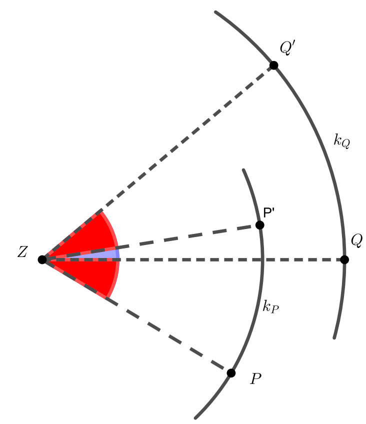
Im folgenden beziehen wir uns auf eine Skizze und beweisen Behauptung 3 für die spezielle Konstellation der Skizze. Damit lassen wir es dann bewenden. Der Beweis für weitere mögliche Konstellationen verläuft quasi analog.

Nr.	Schritt	Begr.	Skizze
(1)	$\overline{PZ} \cong \overline{P'Z} \wedge \overline{QZ} \cong \overline{Q'Z}$	V2	

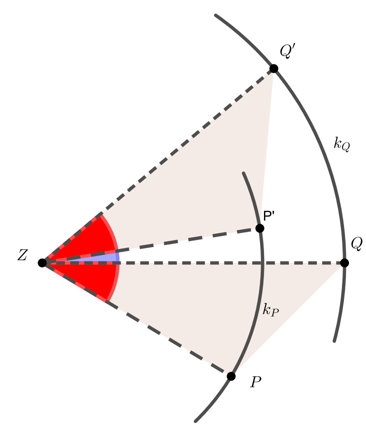
(2) $\angle PZP' \cong \angle QZQ'$ V3



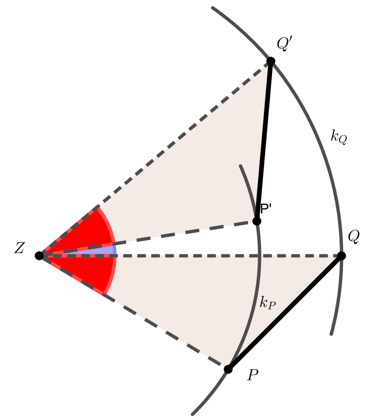
(3) $|\alpha| - |\angle QZP'| = |\angle PZQ| = |\angle P'ZQ'|$



(4) $\overline{PZQ} \cong \overline{P'ZQ'}$ (1), (3), SWS



(5) $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$ (4)



Die Geogebradatei, die für den Beweis verwendet wurde, finden Sie hier: `https://www.geogebra.org/m/q4kpxhex`.
Testen Sie, für welche Konstalltionen von P, Q, α der Beweis anders geschrieben werden müsste.

Satz 6.2

Umkehrung von Satz 6.1
Aus Definition 6.1 folgt Definition 5.2.

Beweis:

Es sei B_Z eine Bewegung mit genau einem Fixpunkt Z. Ferner seien A und B Punkte mit $\operatorname{Nkoll}(A, B, Z)$. A' und B' seien die Bilder von A bzw. B bei B_Z. Wir haben folgendes zu zeigen:

(1) Z wird auf sich selbst abgebildet.

(2) $\overline{AZ} \cong \overline{A'Z}$,

(3) $\overline{BZ} \cong \overline{B'Z}$,

(4) $\angle AZA' \cong \angle BZB'$

Der Nachweis von (1) ist trivial. (2) und (3) folgen unmittelbar aus der Abstandserhaltung von B_Z. Ebenfalls folgt aus der Abstandserhaltung von B_Z folgt $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. Zusammen mit (2) und (3) folgt daraus $\overline{ABZ} \cong \overline{A'B'Z}$. Damit sind auch die beiden Winkel $\angle AZB$ und $\angle A'ZB'$ kongruent zueinander. Je nach Lage gilt jetzt entweder

- $\angle AZA' = \angle AZB - \angle A'ZB$ und $\angle BZB' = \angle A'ZB' - \angle A'ZB$ oder
- $\angle AZA' = \angle AZB + \angle A'ZB$ und $\angle BZB' = \angle A'ZB' + \angle A'ZB$

In beiden Fällen ergibt sich $\angle AZA' \cong \angle BZB'$.

6.2 Drehungen als NAF zweier Geradenspiegelungen

6.2.1 Im Fahrstuhl

Fahrstühle sind nicht gerade Orte in denen man gern verweilt. Insbesondere klaustrophobisch angehauchte Zeitgenossen haben ihre Probleme in den kleinen engen Kabinen. Um kleine Räume optisch zu vergrößern, arbeitet man mit Spiegeln. Aus diesen Gründen sind Aufzugskabinen häufig an drei Seiten mittels Spiegeln verkleidet. Wenn man aufmerksam in geeigneter Weise in die Spiegel schaut, bemerkt man eine Besonderheit, die mit der Nacheinanderausführung zweier Spiegelungen mit sich schneidenden Sgiegelachsen zu tun hat. Die folgenden Bilder illustrieren den Sachverhalt. Sie wurden mit dem 3D-Raytracingprogramm PovRay (`http://www.povray.org/`) generiert.

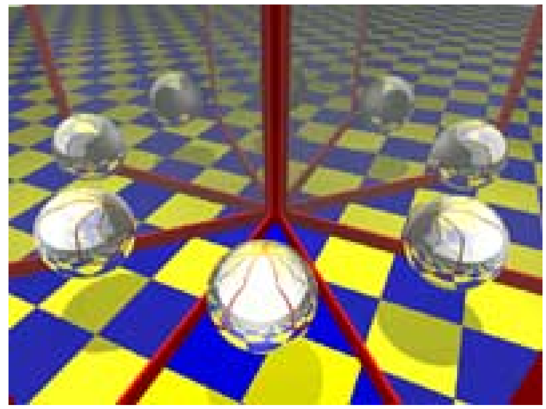


Abbildung 6.1: Kamera blickt in die Spiegel

In der Szene wurden nur zwei Spiegel und eine Kugel eingesetzt. Die Ansicht von oben zeigt das. Lassen Sie die Bilder auf sich wirken und vollziehen Sie das Experiment real mit zwei Spiegeln bzw. dem digitalen Zeitalter entsprechend mit zwei Fotohhandys nach.

Aufgabe 6.1

Zwei Spiegelungen
Zeichnen Sie in ein kartesisches Koordiatensystem die Geraden g und h, die durch die Gleichungen

$$y = \frac{1}{2}x$$
$$y = -2x$$

beschrieben werden.
Zeichnen Sie die Punkte

$$A = (3, -2)$$
$$B = (5, -2)$$
$$C = (5, -4)$$

ein und bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte A'', B'', C'' einmal für $S_g \circ S_h$ und einmal für $S_h \circ S_g$.
Wenden Sie dann die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

auf die Koordinatenpaare der Punkte A, B, C an. Kommentieren Sie Ihre Beobachtungen.

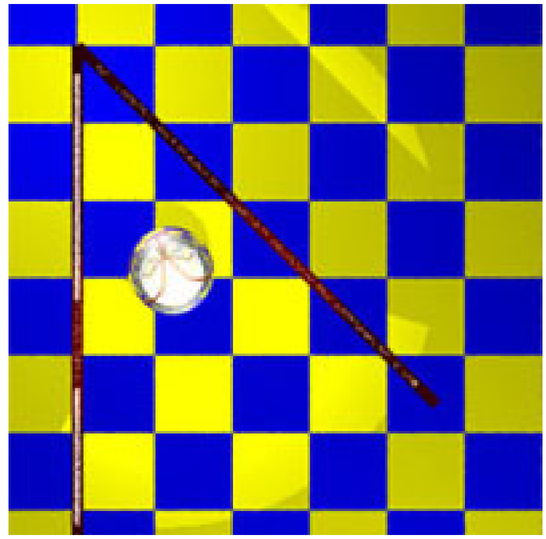


Abbildung 6.2: Kamera blickt von oben auf die Szene

6.2.2 Die NAF zweier Geradenspiegelungen mit sich schneidenden Spiegelachsen

Satz 6.3

Die NAF zweier Spiegelungen mit sich schneidenden Spiegelachsen ist eine Drehung
Es seien S_g und S_h zwei Geradenspiegelungen.
$g \cap h = \{Z\} \Rightarrow S_g \circ S_h = D_{Z,2|\angle g,h|}$

Satz 6.4

Ersetzung einer Drehung durch zwei Geradenspiegelungen
Es sei $D_{Z,\varphi}$ eine Drehung.
$\exists s, h : S_g \circ S_h = D_{Z,\varphi}$

Beweis von Satz 6.3:

Es seien S_a und S_b zwei Geradenspiegelungen mit $a \cap b = \{Z\}$.

Behauptung: Die NAF $S_a \circ S_b$ ist eine Drehung um $D_{Z,\alpha}$ mit $|\alpha| = 2 \cdot |\angle a, b|$

Wegen $Z \in a \wedge Z \in b$ ist Z ein Fixpunkt bzgl. $S_\circ S_b$. Wenn wir jetzt zeigen können, dass für zwei

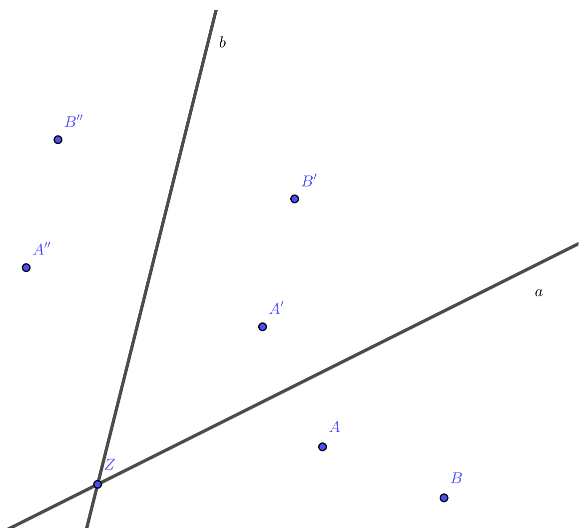
Punkte A und B mit nkoll(A, B, Z) die Bilder A'' und B'' bei $S_a \circ S_b$ gleichzeitig die Bilder einer Drehung um Z sind, ist unser Beweis geführt. (Eine Bewegung ist durch drei nichtkollineare Punkte und deren Bilder eindeutig bestimmt.)

Hierfür sind zwei Eigenschaften nachzuweisen:

(1) $\overline{AZ} \cong \overline{A''Z} \wedge \overline{BZ} \cong \overline{B''Z}$ (Orinial und Bild auf ein und demseleben Kreis um Z.)

(2) $\angle AZA'' \cong \angle BZB''$ (Beide Winkel repräsentieren dann den Drehwinkel.)

Die Bilder von A und B bei S_A seien A' und B' und die Bilder von A' und B' bei S_b seien A'' und B''.

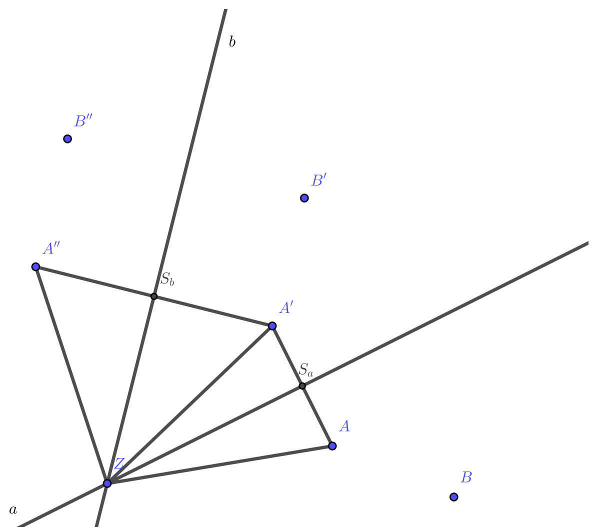


Weil Geradenspiegelungen abstandserhaltend sind und Z ein Fixpunkt bei beiden Faktoren der NAF $S_a \circ S_b$ ist gilt jetzt:

(I)	$\overline{AZ} \cong \overline{A'Z} \cong \overline{A''Z}$	(Abstandserhaltung von Spiegelungen)
(II)	$\overline{BZ} \cong \overline{B'Z} \cong \overline{B''Z}$	(Abstandserhaltung von Spiegelungen)
(III)	$\overline{AZ} \cong \overline{A''Z} \wedge \overline{BZ} \cong \overline{B''Z}$	(I), (II), Transitivität der Kongruenzrelation.

Zu den

Winkel:



Es seien S_a und S_b die Schnittpunkte der Geraden a bzw. b mit den Strecken $\overline{AA'}$ bzw. $\overline{AA''}$. Diese Schnittpunkte sind die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AA'}$ bzw. $\overline{AA''}$ und die Geraden a und b stehen als Mittelsenkrechten senkrecht auf der jeweiligen Strecke. Demzufolge gilt:

(IV)	$\overline{AZS_a} \cong \overline{S_aZA'} \wedge \overline{A'ZS_b} \cong \overline{S_bZA''}$	z.B. SSS oder SWS
(V)	$\angle AZS_a \cong \angle S_aZA' \wedge \angle A'ZS_b \cong \angle S_bZA''$	(IV) und Dreieckskongruenz
(VI)	$\lvert\angle S_aZS_b\rvert = \lvert\angle S_aZA'\rvert + \lvert\angle A'ZS_b\rvert$	A' liegt im Inneren des Winkels Der zwischen den beiden Geraden.
(VII)	$\lvert\angle AZA''\rvert = 2\lvert\angle S_aZS_b\rvert$	(V) und (VI)

Winkel $\angle S_aZS_b$ ist der Winkel zwischen den beiden Geraden a und b also der Winkel $\angle a, b$. Analog kann man diese Betrachtungen für die Punkte B, B' und B'' anstellen. In didesm Fall ergibt sich $|\angle BZB''| = 2|\angle a, b|$. Somit ergibt sich

$$\angle AZA'' \cong \angle BZB''$$

Damit haben wir letzlich gezeigt, dass die NAF zwei Geradenspieglungen mit sich schneidenden Spiegelachsen $S_a \circ S_b$ eine Drehung um den Schnittpunkt der beiden Spiegelachsen ist. Der Drehwinkel hat dabei die doppelte Größe wie der Winkel zwischen den beiden Geraden a und b.

Zusammenfassung:

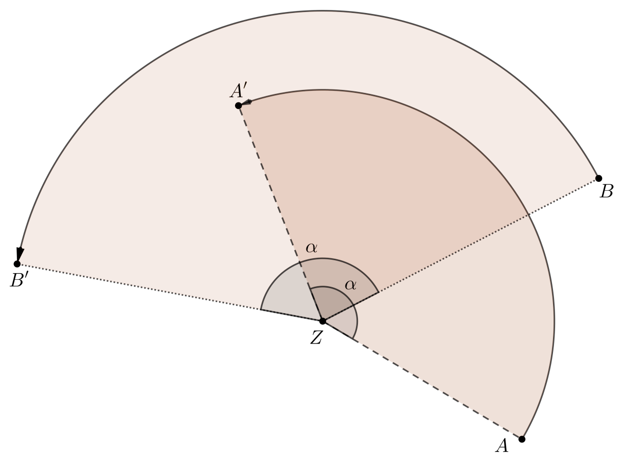
Es seien a und b zwei Geraden, die sich in genau dem Punkt Z schneiden.

$$S_a \circ S_b = D_{Z,2|\angle a.b|}$$

Beweis von Satz 6.4:

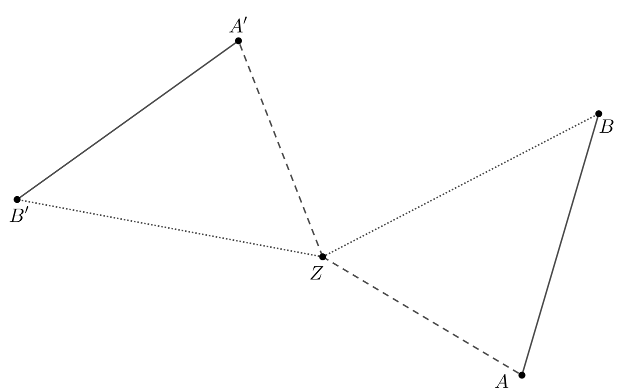
Gegeben Sei eine Drehung $D_{Z,\alpha}$. Wir wissen bereits, dass jede Drehung eine Bewegung ist. Jede Bewegung ist durch drei nichtkollineare Punkte und deren Bilder eindeutig bestimmt. Wir wählen als einen der drei Punkte das Drehzentrum Z. Dazu nehmen wir zwei weitere Punkte A

und B die mit Z nicht auf ein und derselben Geraden liegen. A' und B' seien die Bilder von A bzw.B bei $D_{Z,\alpha}$. Z ist Fixpunkt einer jeden Drehung um Z und wird demzufolge auf sich selbst abgebildet.

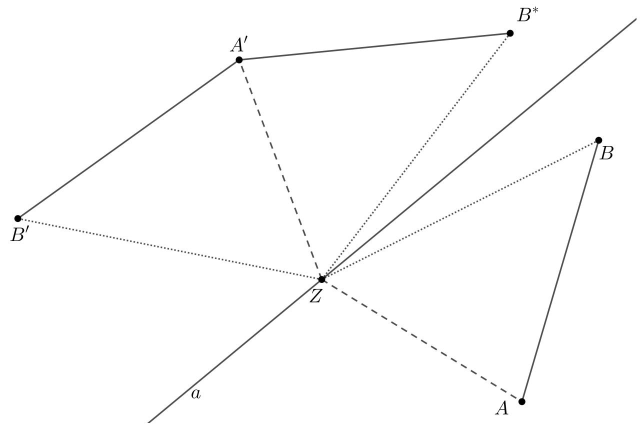


Satz 6.4 ist bewiesen, wenn wir gezeigt haben dass zwei Geraden a und b derart existieren, dass $S_a \circ S_b = D_{Z,\alpha}$ gilt.

Hierzu reduzieren wir die obige Skizze auf das Wesentliche bzgl. der auszuführenden Spiegelungen:



Wir wählen als erste Spiegelachse a die Mittelsenkrechte von $\overline{AA'}$.



Weil $\overline{ZA} \cong \overline{ZA'}$ (Abstandserhaltung der Drehung $D_{Z,\alpha}$ und Fixpunkteigenschaft vom Drehzentrum Z) ist Z nach dem Mittelsenkrechtenkriterium ein Punkt der Mittelsenkrechten a von $\overline{AA'}$:

(I)	$Z \in a$	Abstandserhaltung von $D_{Z,\alpha}$

Die Spiegelung S_a bildet nun das Dreieck $\overline{ABZ}$ wie folgt ab:

(II)	$A \stackrel{S_a}{\to} A'$	Als Spiegelgerade a wurde die Mittelsenkrechte von $\overline{AA'}$ gewählt.
(VII)	$Z \stackrel{S_a}{\to} Z$	(I)
(VIII)	$B \stackrel{S_a}{\to} B^*$	a ist dabei die Mittelsenkrechte von $\overline{BB^*}$

Durch die Spiegelung an a wurden Z und A bereits auf ihre Bilder Z und A' bei der Drehung $D_{Z,\alpha}$ abgebildet. Sollte die Gerade $ZA' := b$ die Mittelsenkrechte von $\overline{B^*B'}$ sein, wäre alles perfekt: Wir bräuchten nur noch an ZA' zu spiegeln und hätten somit die Drehung $D_{Z,\alpha}$ durch die NAF $S_a \circ S_b$ ersetzt.

Nachweis, dass $b \equiv ZA'$ die Mittelsenkrechte von $\overline{ZA'}$ ist:
Unter Berücksichtigung des Mittelsenkrechtenkriteriums ist dieser Nachweis erbracht, wenn wir zeigen können, dass

(1) $\overline{A'B'} \cong \overline{A'B^*}$ und

(2) $\overline{Z'B'} \cong \overline{Z'B^*}$

gilt.

(1) und (2) ergeben sich durch die folgende Beweisführung:

(IX)	$\overline{ZB} \cong \overline{ZB^*}$	Abstandserhaltung von S_a
(X)	$\overline{ZB} \cong \overline{ZB'}$	Abstandserhaltung von $D_{Z,\alpha}$
(XI)	$\overline{ZB'} \cong \overline{ZB^*}$	(IX) und (XI)
(XII)	$\overline{AB} \cong \overline{A'B^*}$	Abstandserhaltung von S_a
(XIII)	$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$	Abstandserhaltung von $D_{Z,\alpha}$
(XIV)	$\overline{A'B'} \cong \overline{A'B^*}$	(XII) und (XIII)