6 Wichtige Sätze der absoluten Geometrie

6.1 Absolute Geometrie - Was geht?

Unter absoluter Geometrie versteht man eine Geometrie, die nur auf den bisher behandelten Axiomen beruht, d.h. eine Geometrie die auf den folgenden Axiomengruppen aufbaut:

(I) Axiome der Inzidenz

(II) Axiome des Abstandes

(III) Axiome der Anordnung

(IV) Axiome der Winkelmessung

(V) Dreieckskongruenzaxiom SWS

In der absoluten Geometrie sind u.a. die folgenden für die Schulgeometrie wichtigen Sätze beweisbar:

1. Basiswinkelsatz und Umkehrung
2. Mittelsenkrechtenkriterium
3. Seiten-Winkel-Beziehungen im Dreieck (Dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber und umgekehrt.)
4. Schwacher Außenwinkelsatz
5. Existenz und Eindeutigkeit des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade
6. Winkelhalbierendenkriterium
7. Umkehrung von Stufen- und Wechselwinkelsatz (Wenn Stufenwinkel bzw. Wechselwinkel kongruent dann Parallelität.)
8. Existenz paralleler Geraden.

Nicht beweisbar sind in der absoluten Geometrie die folgenden für die Schulgeometrie wichtigen Sätze:

a) Wechselwinkelsatz, Stufenwinkelsatz (Wenn die geschnittenen geraden parallel zueinander sind, dann sind die entstehenden Stufen- bzw. Wechselwinkel kongruent zueinander.)

b) Innenwinkelsatz für Dreiecke

c) Starker Außenwinkelsatz

d) Sätze über Parallelogramme (Diagonalen halbieren einander etc.)

Zum Beweis dieser und weiterer Sätze bedarf es der sogenannten Euklidischen Geometrie. Die absolute Geometrie wird zur Euklidischen Geometrie, wenn ihre Axiome um das sogenannte Euklidische Parallelenaxiom ergänzt wird.

wir werden im Folgenden die unter 1. bis 8. genannten Sätze nur mit den Mitteln der absoluten Geometrie beweisen. Beachten Sie also, dass für die Beweise der Stufen- bzw. Wechselwinkelsatz, der Innenwinkelsatz für Dreiecke (uns damit für beliebige Vielecke), viele Parallelogrammeigenschaften nicht zur Verfügung stehen.

Wir werden also die bisher eingeführten Axiome und bisher bereist bewiesene Sätze verwenden. Hier zum Überblick noch einmal wichtige bereits bewiesene Sätze:

(a) Existenz und Eindeutigkeit des Mittelpunktes einer Strecke

(b) Existenz und Eindeutigkeit der Senkrechten in einem Punkt einer Geraden auf dieser Geraden.

(c) Existenz und Eindeutigkeit der mittelsenkrechten einer Strecke

(d) Existenz und Eindeutigkeit der winkelhalbierenden eines Winkels

(e) Das Innere eines Winkels ist konvex

(f) Das Innere eines Dreiecks ist konvex

6.2 Basiswinkelsatz

Definition 6.1

gleichschenkliges Dreieck
Wenn ein Dreieck zwei zueinander kongruente Seiten hat, dann heißt das Dreieck geleichschenklig. Die beiden zueinander kongruenten Seiten heißen Schenkel des geleichschenkligen Dreiecks. Die drite Seite des gleichschnakligen Dreiecks ist seine Basis. Die Innenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks, deren Scheitel jeweils ein Endpunkt der Basis sind, heißen Basoswinkel des gleichschenkligen Dreiecks.

Aufgabe 6.1

Formulieren Sie die obige Definition in einer möglichst formalen mathematischen Ausdrucksweise.

(Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreiecks. Wenn ....)

Satz 6.1

Basiswinkelsatz
Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann sind seine Basiswinkel kongruent zueinander.

Beweis des Basiswinkelsatzes:

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit schulüblichen Bezeichnungen.

V: $a \cong b$

B: $\alpha \cong \beta$

Wegen der bereits bewiesenen Existenz der Winkelhalbierenden eines Winkels können wir auf die Winkelhalbierenden der Innenwinkel von $\overline{ABC}$ zurückgreifen. Sei w_γ die Winkelhalbierende von γ. Nach den Lemmata „Geschichten aus dem Inneren“ schneidet w_γ die Seite c in einem Punkt M.

Nr.	Beweisschritt	Begründung des Beweisschrittes
(I)	$a \cong b$	Voraussetzung
(II)	$\overline{CM} \cong \overline{CM}$	Reflexivität der Relation ≅ b
(III)	$\angle ACM \cong \angle BCM$	w_γ ist Winkelhalbierende von γ
(IV)	$\overline{AMC} \cong \overline{BMC}$	(I), (II), (III), SWS
(V)	$\alpha \cong \beta$	(IV), Definition der Dreieckskongruenz

Aufgabe 6.2

Generieren Sie mit Geogebra eine Skizze zu diesem Beweis. Speichern Sie diese als Vektorgrafik ab und laden Sie die Skizze in den abschnitts des Wikis, in dem diese Datei zu finden ist.

6.3 Mittelsenkrechtenkriterium: Hinrichtung

Satz 6.2

Hinrichtung Mittelsenkrechtenkriterium
Es sei m die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$.

$$P \in m \Rightarrow \overline{PA} \cong \overline{PB}$$

.

Beweis der Hinrichtung des Mittelsenkrechtenkriteriums:

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(1) P ist der Mittelspunkt M von $\overline{AB}$.

(2) P ist nicht der Mittelspunkt M von $\overline{AB}$.

Fall (1) ist trivial. Wir gehen im folgenden von Fall (2) aus.

Nr.	Beweisschritt	Begründung des Beweisschrittes
(I)	$\angle PMA \cong \angle PMB$	$P \in m$, Eigenschaft der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$
(II)	$\overline{AM} \cong \overline{BM}$	M ist der Mittelpunkt von $\overline{AB}$
(III)	$\overline{CM} \cong \overline{CM}$	trivial, bzw. Reflexivität von $\cong$
(IV)	$\overline{AMC} \cong \overline{BMC}$	(I), (II), (III), SWS
(V)	$\overline{AC} \cong \overline{BC}$	(IV), Definition der Dreieckskongruenz

6.4 Mittelsenkrechtenkriterium: Rückrichtung

Satz 6.3

rückrichtung Mittelsenkrechtenkriterium
Es seien m die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ und P ein Punkt.

$$\overline{PA} \cong \overline{PB} \Rightarrow P \in m$$

.

Beweis der Rückrichtung des Mittelsenkrechtenkriteriums:

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(1) P ist der Mittelspunkt M von $\overline{AB}$.

(2) P ist nicht der Mittelspunkt M von $\overline{AB}$.

Im Fall (1) fällt P mit dem Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ zusammen. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist nach Definition des Begriffs Mittelsenkrechte ein Punkt derselben. Wir gehen im folgenden von Fall (2) aus.

Voraussetzung: $\overline{AP} \cong \overline{BP}$

Behauptung: P ist ein Punkt der Mittelsenkrechten m von $\overline{AB}$

Es sei M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Um zu zeigen, dass P zur Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ gehört, genügt es zu zeigen, dass die Winkel $\angle PMA$ und $\angle PMB$ zueinander kongruent sind:

Nr.	Beweisschritt	Begründung des Beweisschrittes
(I)	$\overline{AM} \cong \overline{BM}$	M ist der Mittelpunkt von $\overline{AB}$
(II)	$\overline{PA} \cong \overline{PB}$	Voraussetzung
(III)	$\angle PAM \cong \angle PBM$	(II), Basiswinkelsatz
(IV)	$\overline{PMA} \cong \overline{PMB}$	(I), (II), (III), SWS
(V)	$\angle PMA \cong \angle PMB$	(IV), Definition Dreieckskongruenz

6.5 Umkehrung des Basiswinkelsatzes

Freitag 10. Juli 2020

6.6 Schwacher Außenwinkelsatz

Freitag 10. Juli 2020

6.7 Seiten-Winkelbeziehungen im Dreieck

Freitag 10. Juli 2020

6.8 Existenz und Eindeutigkeit des Lotes

Freitag 10. Juli 2020

6.9 Winkelhalbierendenkriterium

Freitag 10. Juli 2020