Definitionen:

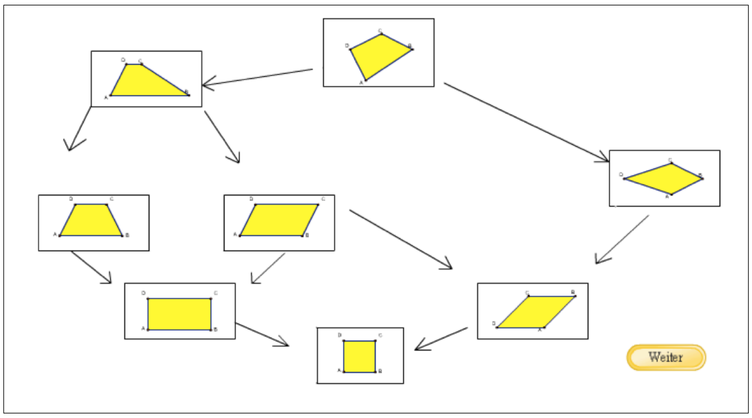
Figuren:
Drache: ein Viereck, bei dem die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen und bei EINEM der Diagonalen halbiert wird.
Kreis: Menge aller Punkte, die zu M den Abstand r haben
Parallelogramm: Viereck ist dann ein Parallelogramm, wenn sich seine Diagonalen halbieren
Quadrat: Viereck mit vier gleich langen Seiten und einem rechten Innenwinkel
Rechteck: Viereck, mit 1 rechten Innenwinkel und zwei Paar paralleler Seiten.
Raute: Ein Viereck mit 4 gleichlangen Seiten.
Sehnenviereck: Viereck mit einem Umkreis
Trapez: Ein Trapez ist ein Viereck mit einem Paar paralleler Seiten.
Gleichschenkliges Trapez: Trapez, bei dem Eckpunkte auf einem Umkr. Liegen

Winkeldefinitionen:
Winkel: Die Vereinigungsmenge zweier Strahlen SA+ und SB+, die einen gemeinsamen Anfangspunkt S haben.
Innere eines Winkels: Schnitt der Halbebenen SA, B+ und SB, A+ (Innere ist konvex)
Spitzer Winkel: Winkel ist kleiner ist als sein Nebenwinkel (< 90)
Rechter Winkel: Winkel ist genau so groß wie sein NW(=90)
Stumpfer Winkel: Winkel ist größer ist als sein NW (> 90)
Scheitelwinkel: 2 Winkel = SW, wenn ihre Schenkel ein paar sich schneidender Geraden bilden.
Nebenwinkel: 2 Winkel NW, wenn sie einen Schenkel gemeinsam haben & jeweils andere Schenkel eine Gerade bilden.
Stufenwinkel: 2 Winkel, die auf selben Seite von s und von den [Paralleln] g und h liegen
Supplementärwinkel: Summe zweier Winkel = 180 → Winkel supplementär
Winkelhalbierende: Strahl, der Winkel ASB in zwei kongruente Winkel teilt
Zentriwinkel: Jeder Winkel, dessen Scheitelpunkt auf Mittelpunkt M liegt
Peripheriewinkel: Scheitel des Winkels auf Kreis & beide Schenkel schneiden Kreis in genau einem weiteren Punkt

Strecken / Geraden / Ebenen etc.:
Mittelpunkt: 1. M € AB, 2. /AM/=/MB/
Mittelsenkrechte: m ist Ms von AB:= 1. m senkrecht AB, 2. /AM/=/BM/
Zwischen: 1 Beispiel: /AB/+/BC/= /AC/ <--> dann Zw (ABC)
Strecke: AB: {P/Zw(APB)} vereinigt {A,B},
Halbgerade AB+: Verlängerung der Strecke AB über B hinaus: AB+: {P/Zw(APB) oder Zw(ABP} vereinigt {AB}
Halbgerade AB-: AB- : Verlängerung der Strecke AB über A hinaus: {P/Zw (PAB} vereinigt mit {A}
Halbebene gQ+: gQ+: {P/PQ geschnitten g= {}} vereinigt {g}
Halbebene gQ-: qQ-: {P/PQ geschnitten g = S}
Gleichschenkliges Dreieck: Dreieck mit 2 gleichlangen Seiten
Schenkel gleich. Dreieck: Die beiden gleichlangen Seiten heißen Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks.
Sekante: Eine Gerade g, die einen Kreis k in zwei Punkten schneidet
Tangente: Eine Gerade g, die einen Kreis k in genau einem Punkt P berührt

Passante: Eine Gerade g, die mit einem Kreis k keinen Punkt gemeinsam hat
Basis eines gleichschenkligen Dreiecks: Die 3. Seite (nicht gleichlange Seite) heißt Basis des gleichschenkligen Dreiecks.
Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks:
Innenwinkel, deren Scheitel Endpunkte der Basis sind.

Sätze:
1. E. & E. des Mittelpunkts einer Strecke:
Jede Strecke hat genau einen MP.
2. E. & E. der Senkrechten in einem Punkt:
Gerade g der Ebene E. P Punkt auf g. In E genau eine Gerade s, die durch P geht & senkrecht auf g ist.
6.E.& E. Mittelsenkrechte:
Jede Strecke hat genau eine Ms.
3. E. & E. Winkelhalbierenden:
Zu jedem Winkel gibt es genau eine Winkelhalbierende
4. Mittelsenkrechtskriterium:
Menge M von Punkten ist genau dann MS einer Strecke AB, wenn für jeden Punkt von M gilt: /AP/ = /BP/
5. Winkelhalbierendenkriterium:
Alle Punkte auf der Winkelhalb. haben zu d. Schenkeln den gleichen Abstand.
6. E.&E. des Lotes:
Zu jedem Punkt P außerhalb von einer Geraden g gibt es genau ein Lot von P auf g.
7. Lemma 2:
Wenn ein Punkt P im Inneren des Winkel ASB liegt, dann liegt der gesamte Strahl SP+ im Inneren des Winkels ASB.
8. Lemma 3:
Wenn ein Punkt P im Inneren des Winkels ASB liegt, dann schneidet SP+ die offene Strecke AB.
9. schwacher Außenwinkelsatz:
Korollar 1: Im jedem Dreieck sind mind. 2 Winkel spitze Winkel.
Korollar 2: Die Summe der Größen zweier Innenwinkel eines Dreiecks ist stets kleiner als 180.
10. Satz des Thales:
Punkt C eines Dreiecks ABC auf ein Halbkreis über Strecke AB, dann ist Winkel bei C ein rechter Winkel.
15. Zentri-Peripheriewinkelsatz:
Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß wie sein zugehöriger Zentriwinkel.
Basiswinkelsatz:
Der Basiswinkelsatz besagt, dass in einem gleichschenkligen Dreieck die beiden Basiswinkel, also die Winkel, die den gleich langen Seiten gegenüber liegen, gleich groß sind.
Umgekehrt gilt auch: Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich groß, so sind auch die beiden gegenüberliegenden Seiten gleich lang.
Stufenwinkelsatz:
Wenn zwei parallele Geraden a und b von einer dritten Geraden c geschnitten werden, so sind die auftretenden Stufenwinkel gleich groß.
Der Stufenwinkelsatz ist umkehrbar, d. h. es gilt: Werden zwei Geraden a und b von einer dritten Geraden c geschnitten und die Stufenwinkel sind gleich groß, so sind a und b parallel.
Wechselwinkelsatz:
Wechselwinkel sind gleich groß genau dann, wenn sie an parallelen Geraden liegen.
Scheitelwinkelsatz:
Wenn zwei Winkel Scheitelwinkel sind, dann sind sie gleich groß.

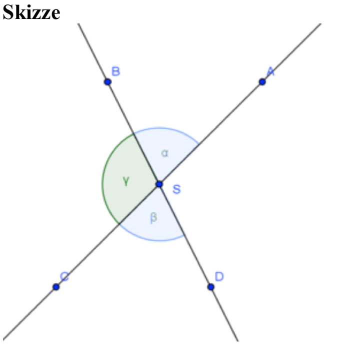


Beispiel für direkten Beweis:
Der Scheitelwinkelsatz

Vorab
Es sei bereits klar, dass Nebenwinkel supplementär sind (sich zu 180° ergänzen). Natürlich seien die Begriffe Scheitelwinkel und Nebenwinkel sauber definiert.

Der Satz
Satz: (Scheitelwinkelsatz)
Wenn zwei Winkel α und β Scheitelwinkel sind, so haben sie dieselbe Größe.
Der Beweis

Skizze



Voraussetzung
α und β bilden ein Paar von Scheitelwinkeln

Behauptung
$|\alpha| = |\beta|$

Beweisführung
(unter Bezug auf die Beweisskizze)

1. $|\alpha| + |\gamma| = 180°$
(Begründung: α und β sind Nebenwinkel und als solche supplementär.)

2. $|\beta| + |\gamma| = 180°$
(Begründung: β und γ sind Nebenwinkel und als solche supplementär.)

3. $|\alpha| + |\gamma| = |\beta| + |\gamma|$
(Begründung: linke Seite von Gleichung 1 ist gleich der linken Seite von Geleichung 2.)

4. $|\alpha| = |\beta|$
(Begründung: Auf beiden Seiten der Gleichung 3 $|\gamma|$ subtrahieren.)

Beispiel für indirekten Beweis:
Winkel-Seiten-Beziehung im Dreieck

Vorab
Wir gehen davon aus, dass wir die Seiten-Winkel-Beziehung für Dreiecke bereits bewiesen haben: In jedem Dreieck liegt der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber.

Der Satz
Satz: (W-S-Beziehung im Dreieck)
Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit den schulüblichen Bezeichnungen. Wenn der Winkel α größer als der Winkel β ist, dann ist die Seite a länger als die Seite b.

Voraussetzung
$|\alpha| > |\beta|$

Behauptung
$|a| > |b|$

Annahme
$|a| \leq |b|$ (Das Gegenteil der Behauptung)

Beweisführung
Mittels der Annahme wird ein Widerspruch aufgedeckt.
Im speziellen Fall geht das sehr schnell:
1. Aus der Annahme folgt unter Berücksichtigung der bereits bewiesenen Seiten-Winkelbeziehung, dass $|\alpha| \leq |\beta|$ gelten muss.
2. Letzteres ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $|\alpha| > |\beta|$.
Die Annahme ist somit zu verwerfen.

Dreiecktransversalen:
1. Umkreis eines Dreiecks:
Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt M. M ist der Umkreismittelpunkt.
2. Inkreis eines Dreiecks:
Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt M. Dieser Punkt M ist Inkreismittelpunkt. Die Seiten des Dreiecks Ab, BC, AC sind Tangenten an den Inkreis.
3. Seitenhalbierenden eines Dreiecks:
schneiden sich in einem Punkt S. S ist der Punkt, wo das Dreieck den Schwerpunkt hat.
4. Höhen eines Dreiecks:
Die Höhen des Dreiecks (Lote der Eckpunkte) schneiden sich in einem Punkt.

Notwendigkeit / Hinreichend:
Hinreichende Bedingung: Bedingung reicht aus, damit die Figur entsteht, Aber diese Bedingung ist nicht die Einzige, die zur Figur führt, es kann auch anders zur Figur kommen, A → B, A: hinreichende Bedingung, B: Figur
Notwendige Bedingung: Bedingung muss stehen, damit die Figur entstehen kann, Bedingung ist aber nicht die Einzige, die erfüllt sein muss, damit die Figur entsteht→ sondern man braucht noch mehr notwendige Bedingungen, B→ A, B: notwendige Bedingung für A
Kriterium: notwendige + hinreichende Bedingung, A äquivalent B