Geometrie WS 2011/12 ohne Lösungen

Gieding

06.01.12

0.1 Die Aufgabe

a) Es sei p die Normalparabel, d.h. der Graph der Funktion $f(x) = x^2$. p' sei das Bild von p bei einer Drehung $D_{Z,\alpha}$. Bei dieser Drehung werden die Punkte $S\,(0|0)\,, A\,(1|1)$ und $B\,(-1|1)$ auf ihre Bilder $S'\,(0|-3)\,, A'\,(-1|-2)$ und $B'\,(-1|-4)$ abgebildet (s. Abb. 01).
Bestimmen Sie das Drehzentrum $Z\,(x_Z|y_Z)$ und den Drehwinkel α.

b) Beweisen Sie, dass es eine zenrische Streckung $ZS_{Z,k}$ gibt, die die Normalparabel auf den Graphen der Funktion $y(x) = -\frac{1}{2}x^2$ abbildet. Bestimmen Sie diesbezüglich das Steckzentrum $Z\,(x_Z|y_Z)$ und den Streckfaktor k.

c) Alle Parabeln sind einander ähnlich. Es sei $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Damit existiert zu jedem a eine Ähnlichkeitsabbildung φ_a, die die Normalparabel auf den Graphen g_a der Funktion $y(x) = ax^2$ abbildet. Geben Sie den Streckfaktor $k(a)$ der jeweiligen Ähnlichkeitsabbildung φ_a als Funktion von a an.

d) In Mike's Billardpub wurde ein Billardtisch mit parabelförmiger Bande b aufgestellt. b lässt sich als Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ auffassen. Wir modellieren Kugel 1 als Punktmasse $K_1\,(x_1|y_1)$ und Kugel 2 als Punktmasse $K_2\,(x_2|y_2)$. Es gelte zunächst $x_1 = 2, y_1 = 10$ und $x_2 = -2, y_2 = 10$. Sowohl K_1 als auch K_2 werden exakt zum gleichen Zeitpunkt t_0 derart angestoßen, dass sie sich mit einer Geschwindigkeit v von $\frac{1}{4}$ Längeneinheiten pro Sekunde parallel zur Symmetrieachse von b bewegen. Wann und wo stoßen K_1 und K_2 zusammen? Die Kugeln erfahren weder beim Rollen noch bei der Reflexion an der Bande b Geschwindigkeitsverluste.

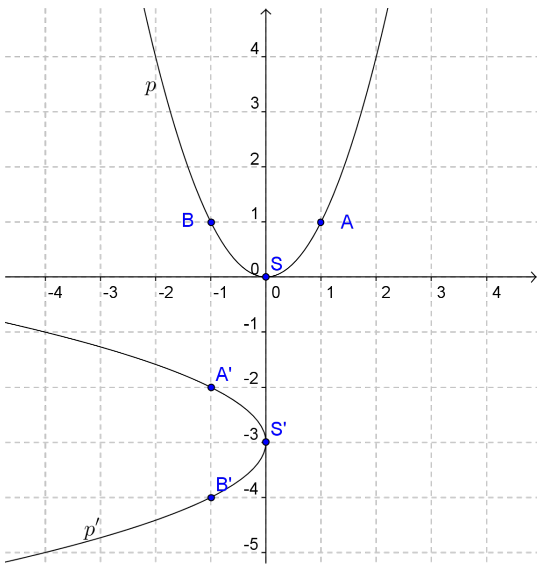

Abb. 01

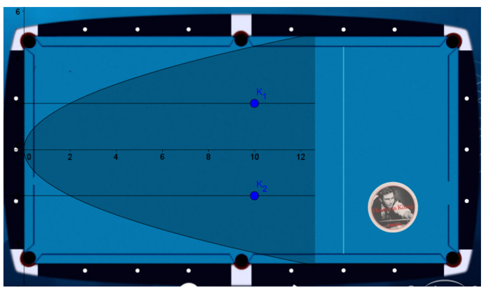

Abb. 02