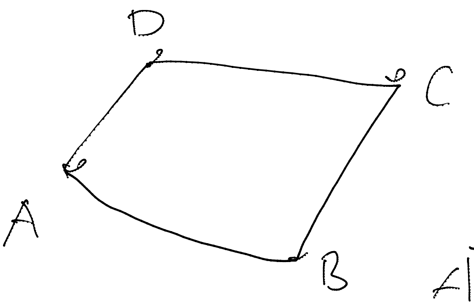
Einführung in die Geometrie: Axiomatische Geometrie

Freitag, 22. Mai 2020
09:31

Die Axiome der Inzidenz oder was ist ein Punkt?

„Man muss jederzeit an Stelle von Punkte, Geraden, Ebenen, Tische, Stühle, Bierseidel sagen können."
—David Hilbert



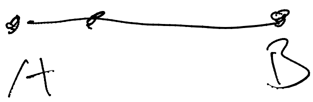
$\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{AD}$

$\overline{ABCD} :=$

Strecke ?

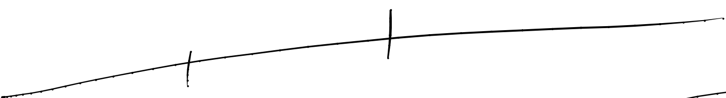
P

Punkt ?



Q ⇔ R ← P ← ; C ← L – Strecke

Punkt

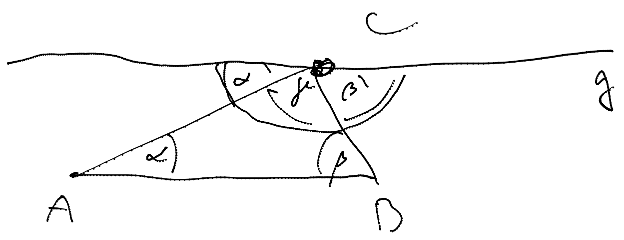


Undefinierte Grundbegriffe
Geraden, Punkte, Ebenen

$ax + by + c = 0$

Axiome?
Unbewiesene Grundannahmen

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



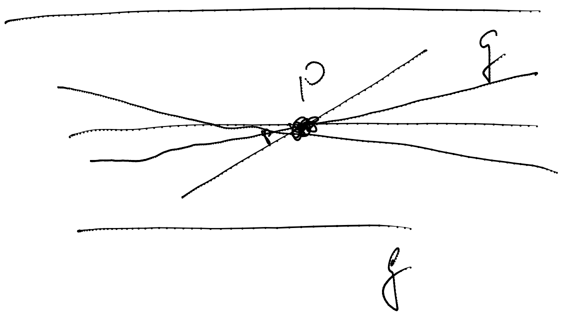
$C \in g$

$g \parallel AB$

$\alpha' + \gamma + \beta' = 180°$

Wechselwinkelsatz

$h \parallel g$



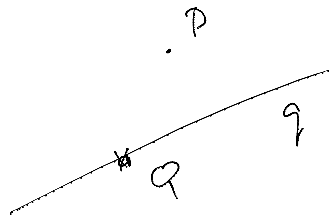
So wenig wie möglich axiomatisch fordern

Undefinierte Grundbegriffe -> Definitionen
Axiome -> Sätze

Die Axiome der Inzidenz

Freitag, 22. Mai 2020
10:48

Inzidenz: Ein Punkt inzidiert mit einer Geraden, er gehört zur Geraden



$Q \in g$

AB

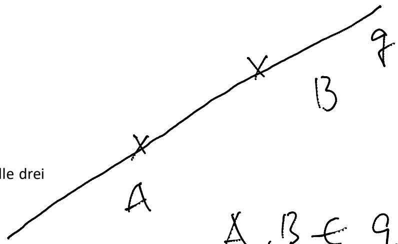
Axiom 0: Geraden und Ebenen sind Punktmengen

Axiom I1: Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

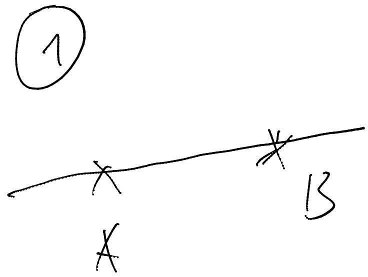
Axiom I2: Zu jeder Geraden gehören wenigstens zwei verschiedene Punkte.

Definition: (Kollinearität)
Drei Punkte A,B und C heißen kollinerar, wenn es eine Gerade gibt, die durch alle drei Punkte geht. Schreibweise: koll(A,B,C)

Axiom I3: Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht kollinear sind.

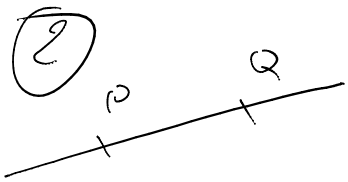


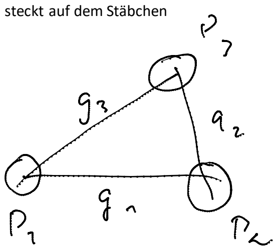
$A, B \in g$

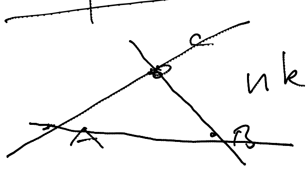


Modell für die ebene Inzidenzgeometrie:

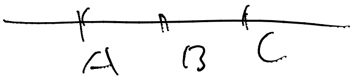
Drei Knetekugel: Modellpunkte
Drei Schaschlikstäbchen: Modellgeraden
Inzidenz: Kugel steckt auf dem Stäbchen







nkoll(A,B,C)



koll(A,B,C)

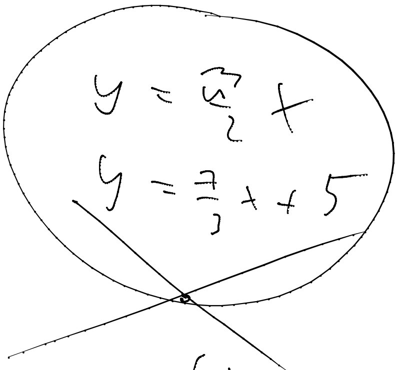
P_1, P_2 inzidieren mit g_1
Axiom 1, 2, 3 sind erfüllt im Modell
0 ist nicht erfüllt im Modell
daraus kann gefolgert werden, dass
A0 unabhängig ist bzg. A 1,2,3.

Wichtig für Klausuren und Prüfungen:
Was bedeutet ein Axiomensystem ist unabhängig?
Was bedeutet ein Axiomensystem ist widerspruchsfrei?

Aussage a ist beweisbar mittels des Systems, dann ist nicht a nicht beweisbar.

$y = \frac{3}{2}x$

$y = \frac{7}{3}x + 5$



Beweise auf der Grundlage unseres Axiomensystems

Satz: Zwei verschiedene Gerade haben höchstens einen Punkt gemeinsam.

Wenn zwei Geraden a und b verschieden sind, dann haben sie höchstens einen Punkt gemeinsam.

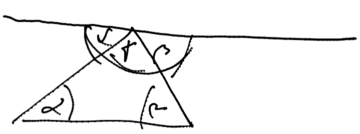
$a \neq b$

Voraussetzung: a ~~verschieden von b~~ u
Behauptung: a und b haben höchstens einen Punkt gemeinsam.

Beweis: indirekt

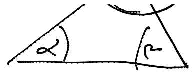
Widerspruchsbeweis

Annahme die Behauptung gilt nicht obwohl die Voraussetzung erfüllt ist.



Negation der Behauptung: nicht(a und b haben höchstens einen Punkt gemeinsam)
a und b haben mehr als einen Punkt gemeinsam
a und b haben wenigsten zwei Punkte gemeinsam

Negation der Behauptung: nicht(a und b haben höchstens einen Punkt gemeinsam)
a und b haben mehr als einen Punkt gemeinsam
a und b haben wenigsten zwei Punkte gemeinsam



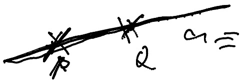
a -> b

Annahme: a und b haben zwei Punkte gemeinsam, seien das die Punkte P und Q

Annahme ¬b , a [illegible] wahr ✓

Beweis:

Durch P und Q geht genau eine Gerade (nach Axiom I1).
Nach unserer Annahme geht
1. a durch P und Q
2. b durch P und Q.



$a \equiv b$ ↯ ✓

Daraus folgt: a und b sind identisch, das ist jedoch ein Widerspruch zur Voraussetzung: a und b sind verschieden zu einander.
Also ist unsere Annahme zu verwerfen.

Kontraposition:

I: a -> b
U: b->a
K: nicht b -> nicht a

Anstelle der Implikation kann auch die Kontraposition bewiesen werden.

a und b haben zwei Punkte gemeinsam -> a und b sind identisch

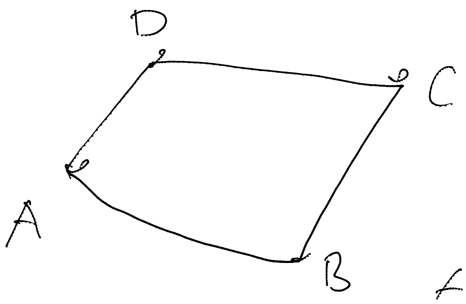
Gilt wegen Axiom I1

Einführung in die Geometrie: Axiomatische Geometrie

Freitag, 22. Mai 2020
09:31

Die Axiome der Inzidenz oder was ist ein Punkt?

„Man muss jederzeit an Stelle von Punkte, Geraden, Ebenen, Tische, Stühle, Bierseidel sagen können."
—David Hilbert



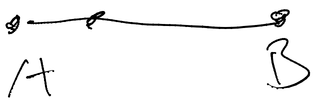
$\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{AD}$

$\overline{ABCD} :=$

Strecke ?

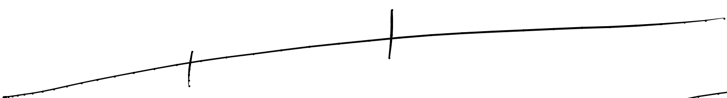
P

Punkt ?



Q ⇔ R ∈ P ∈ i ∈ (– l – Strecke

Punkt

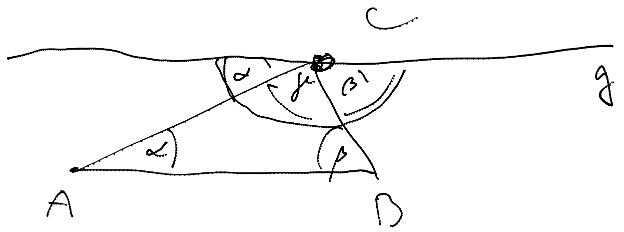


Undefinierte Grundbegriffe
Geraden, Punkte, Ebenen

$ax + by + = 0$

Axiome?
Unbewiesene Grundannahmen

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

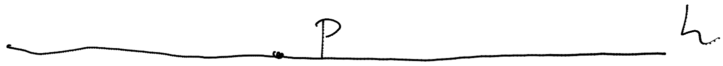


$C \in g$

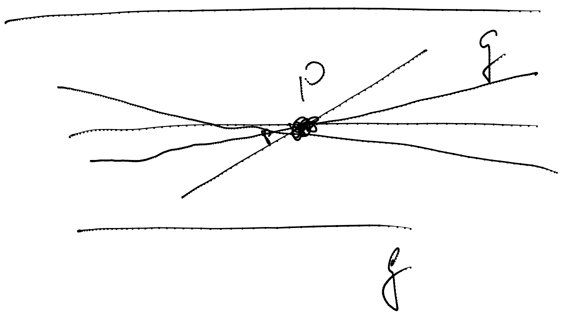
$g \parallel AB$

$\alpha' + \gamma + \beta' = 180^\circ$

Wechselwinkelsatz



$h \parallel g$



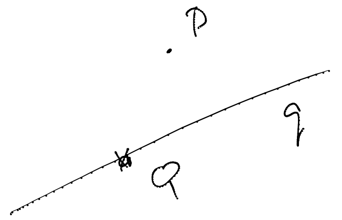
So wenig wie möglich axiomatisch fordern

Undefinierte Grundbegriffe -> Definitionen
Axiome -> Sätze

Die Axiome der Inzidenz

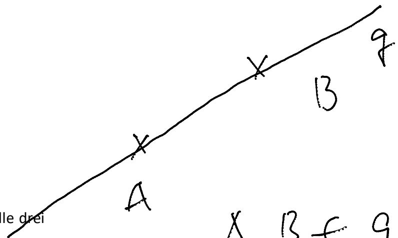
Freitag, 22. Mai 2020
10:48

Inzidenz: Ein Punkt inzidiert mit einer Geraden, er gehört zur Geraden

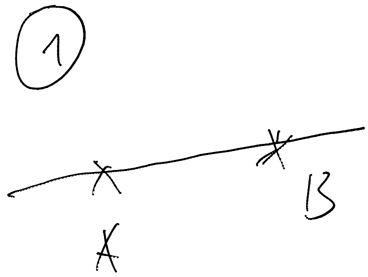


$Q \in g$

AB



$A, B \in g$



Axiome der ebenen Inzidenzgeometrie

Axiom 0: Geraden und Ebenen sind Punktmengen

Axiom I.1: Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

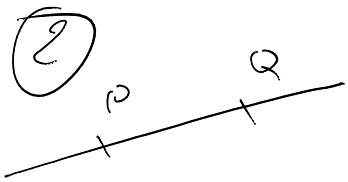
Axiom I.2: Zu jeder Geraden gehören wenigstens zwei verschiedene Punkte.

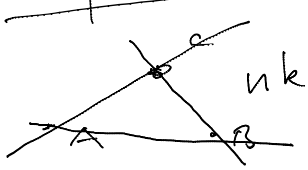
Definition: (Kollinearität)
Drei Punkte A,B und C heißen kollinerar, wenn es eine Gerade gibt, die durch alle drei Punkte geht. Schreibweise: koll(A,B,C)

Axiom I.3: Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht kollinear sind.

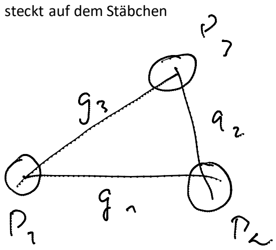
Modell für die ebene Inzidenzgeometrie:

Drei Knetekugel: Modellpunkte
Drei Schaschlikstäbchen: Modellgeraden
Inzidenz: Kugel steckt auf dem Stäbchen

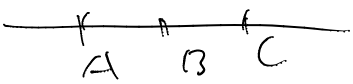




nkoll(A,B,C)



koll(A,B,C)



P_1, P_2 inzidieren mit g_1
Axiom 1, 2, 3 sind erfüllt im Modell
0 ist nicht erfüllt im Modell
daraus kann gefolgert werden, dass:
A0 unabhängig ist zu A 1,2,3.

Wichtig für Klausuren und Prüfungen:
Was bedeutet ein Axiomensystem ist unabhängig?
Was bedeutet ein Axiomensystem ist widerspruchsfrei?

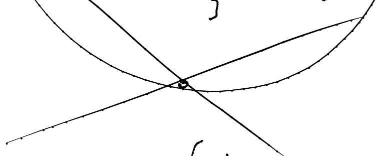
Aussage a ist beweisbar mittels des Systems, dann ist nicht a nicht beweisbar.

$y = \frac{3}{2}x$

$y = \frac{7}{3}x + 5$

Beweise auf der Grundlage unseres Axiomensystems

Satz: Zwei verschiedene Gerade haben höchstens einen Punkt gemeinsam.



Wenn zwei Geraden a und b verschieden sind, dann haben sie höchstens einen Punkt gemeinsam.

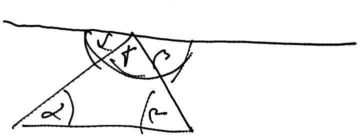
Voraussetzung: a ~~verschieden von b~~ u
Behauptung: a und b haben höchstens einen Punkt gemeinsam.

$a \neq b$

Beweis: indirekt

Widerspruchsbeweis

Annahme die Behauptung gilt nicht obwohl die Voraussetzung erfüllt ist.



Negation der Behauptung: nicht(a und b haben höchstens einen Punkt gemeinsam)
a und b haben mehr als einen Punkt gemeinsam
a und b haben wenigsten zwei Punkte gemeinsam

Negation der Behauptung: nicht(a und b haben höchstens einen Punkt gemeinsam)
a und b haben mehr als einen Punkt gemeinsam
a und b haben wenigsten zwei Punkte gemeinsam

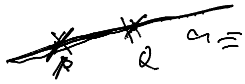
$a \to b$

Annahme: a und b haben zwei Punkte gemeinsam, seien das die Punkte P und Q

Annahme ¬b, a gilt nicht

Beweis:

Durch P und Q geht genau eine Gerade (nach Axiom I1).
Nach unserer Annahme geht
1. a durch P und Q
2. b durch P und Q.



$a \equiv b$ ↯ ✓

Daraus folgt: a und b sind identisch, das ist jedoch ein Widerspruch zur Voraussetzung: a und b sind verschieden zu einander.
Also ist unsere Annahme zu verwerfen.

Kontraposition:

I: a -> b
U: b->a
K: nicht b -> nicht a

Anstelle der Implikation kann auch die Kontraposition bewiesen werden.

a und b haben zwei Punkte gemeinsam -> a und b sind identisch

Gilt wegen Axiom I1

Nachbearbeitung

Hier noch mal das Ganze mit mehr eindeutigen Variablen,
Oben kann man durcheinander kommen weil z.B. a einmal als Bezeichnung für eine ausgewählte Gerade und einmal als Name für eine Aussage verwendet wird

Beweise auf der Grundlage unseres Axiomensystems

Satz: Zwei verschiedene Gerade haben höchstens einen Punkt gemeinsam.

Wenn zwei Geraden a und b verschieden sind, dann haben sie höchstens einen Punkt gemeinsam.

Voraussetzung: a verschieden von b
Behauptung: a und b haben höchstens einen Punkt gemeinsam.

Beweis: indirekt

Widerspruchsbeweis

Annahme die Behauptung gilt nicht obwohl die Voraussetzung erfüllt ist.

Negation der Behauptung: nicht(a und b haben höchstens einen Punkt gemeinsam)
a und b haben mehr als einen Punkt gemeinsam
a und b haben wenigsten zwei Punkte gemeinsam

Annahme: a und b haben zwei Punkte gemeinsam, seien das die Punkte P und Q

Beweis:

Durch P und Q geht genau eine Gerade (nach Axiom I1).
Nach unserer Annahme geht
1. a durch P und Q
2. b durch P und Q.

Daraus folgt: a und b sind identisch, das ist jedoch ein Widerspruch zur Voraussetzung: a und b sind verschieden zu einander.
Also ist unsere Annahme zu verwerfen.

Kontraposition:

I: Aussage 1 -> Aussage 2
U: Aussage 2 -> Aussage 1
K: Negation von Aussage 2 -> Negation von Aussage 1

Anstelle der Implikation kann auch die Kontraposition bewiesen werden.

a und b haben zwei Punkte gemeinsam -> a und b sind identisch

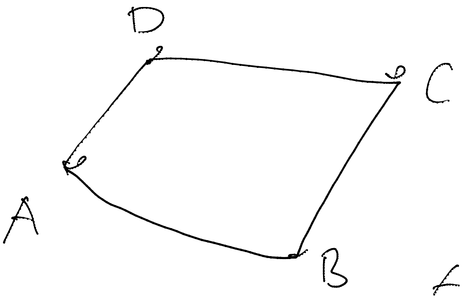
Gilt wegen Axiom I1

Einführung in die Geometrie: Axiomatische Geometrie

Freitag, 22. Mai 2020
09:31

Die Axiome der Inzidenz oder was ist ein Punkt?

„Man muss jederzeit an Stelle von Punkte, Geraden, Ebenen, Tische, Stühle, Bierseidel sagen können.“
—David Hilbert

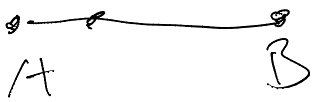


$\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{AD}$

$\overline{ABCD} :=$

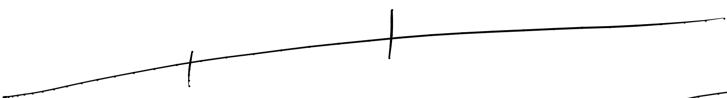
Strecke ?

Punkt ?



Strecke

Punkt

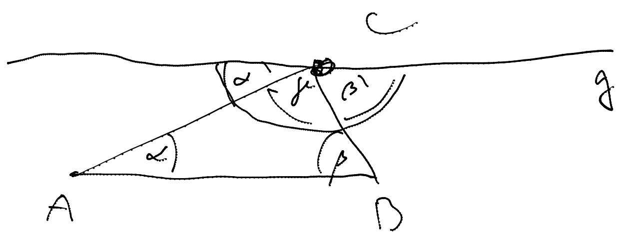


Undefinierte Grundbegriffe
Geraden, Punkte, Ebenen

$ax + by + c = 0$

Axiome?
Unbewiesene Grundannahmen

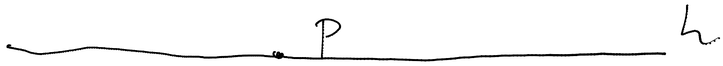
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



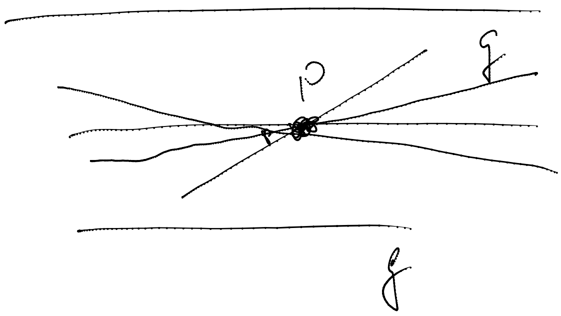
$C \in g$
$g \parallel AB$

$\alpha' + \gamma + \beta' = 180°$

Wechselwinkelsatz



$h \parallel g$



So wenig wie möglich axiomatisch fordern

Undefinierte Grundbegriffe -> Definitionen
Axiome -> Sätze