2 Fixpunkt, Fixgerade, Fixpunktgerade

2.1 Fixpunkte

Beispiele für Fixpunkte einer Abbildung:

a) Das Drehzentrum einer Drehung ist Fixpunkt bzgl. dieser Drehung.

b) Das Streckzentrum einer zentrischen Streckung ist Fixpunkt bzgl. dieser zentrischen Streckung.

c) Jeder Punkt der Spiegelgeraden s ist ein Fixpunkt bzgl. der Spiegelung an s.

Definition 2.1

Fixpunkt einer Abbildung
Es sei φ eine geometrische Abbildung.
Wenn ein Punkt F durch φ auf sich selbst abgebildet wird,
dann heißt F Fixpunkt bzgl. der Abbildung φ.

2.2 Fixgeraden

Beispiele für Fixgeraden einer Abbildung:

a) Es sei V eine Verschiebung längs des Vektors $\vec{v}$. Jede Gerade g, die parallel zu $\vec{v}$ ist, wird durch V, zwar nicht punktweise jedoch insgesamt, auf sich selbst abgebildet.

b) Es sei φ eine Punktspiegelung an Z und g eine Gerade, die durch Z geht. Jetzt gilt:

   1) Der Punkt Z, der ja auch Punkt von g ist, wird durch φ auf sich selbst abgebildet, er ist Fixpunkt bzgl. φ.
   2) ZA^+ sei eine Halbgerade von g. Jeder Punkt $P \in ZA^+$ wird auf einen Punkt $P' \in ZA^-$ abgebildet.
   3) Jeder Punkt $Q \in ZA^-$ wird auf einen Punkt $Q' \in ZA^+$ abgebildet.
   4) Insegesamt wird g durch φ also auf sich selbst abgebildet.
   5) Einer der Punkte von g ist sogar Fixpunkt bzgl. φ. Bezüglich der Eigenschaft von g Fixgerade von φ zu sein, ist diese Fixpunkteigenschaft von Z jedoch nicht maßgeblich.

c) Bezüglich der Identität ist jeder Punkt Fixpunkt. Jede Gerade besteht damit nur aus Fixpunkten und wird durch die Identität selbstverständlich auf sich selbst abgebildet. Jede Gerade ist bezüglich id also eine sogenannte Fixpunktgerade und damit ein Spezialfall der Fixgeraden.

Definition 2.2

Fixgerade bzgl. einer Abbildung
Es seien φ eine Abbildung und g eine Gerade. Wenn das bild von g bei φ g selbst ist, heißt g Fixgerade bzgl. φ.

2.3 Fixpunktgeraden

Beispiele für Fixgeraden einer Abbildung:

a) s. Item c) der Beispiele zum Begriff Fixgerade

b) Die Spiegelachse s einer Geradenspiegelung S_s wird punktweise auf sich selbst abgebildet und ist damit eine Fixpunktgerade bzgl. S_s.

c) Jede Gerade, die durch das Streckzentrum einer zentrischen Streckung mit dem Streckfaktor 1 geht, ist Fixpunktgerade bzgl. dieser zentrischen Streckung.

Definition 2.3

Fixpunktgerade bzgl. einer Abbildung
Eine Gerade, die bzgl. einer Abbildung φ nur aus Fixpunkten besteht, heißt Fixpunktgerade bzgl. φ.

2.4 Übungsaufgaben zum Thema

Aufgabe 2.1

Fixgeraden einer Spiegelung
Es sei S_g die Spiegelung an der Geraden g. Es gibt unendlich viele Geraden, die bzgl. S_g Fixgeraden aber keine Fixpunktgeraden sind. Beschreiben Sie diese Geraden.

Aufgabe 2.2

Fixpunkte bei der Zentralprojektion
Wir betrachten alle Punkte des Raumes. Die sogenannte Zentralprojektion $ZP_{Z,\beta}$ bildet diese Punkte auf eine Bildebene β ab. Hierzu bestimmt man einen sogenannten Zentralpunkt außerhalb von β. Es sei $Z \notin \beta$ dieser Zentralpunkt. Das Bild eines beliebigen Punktes P ist der Schnittpunkt der Geraden ZP mit der Bildebene β: $P' := ZP \cap \beta$.

a) Bezüglich eines Punktes ist $ZP_{Z,\beta}$ keine Abbildung. Welcher Punkt des Raumes ist das? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) $ZP_{Z,\beta}$ hat unendlich viele Fixpunkte . Beschreiben Sie diese.

c) $ZP_{Z,\beta}$ hat unendlich viele Fixpunktgeraden, jedoch keine Fixgerade, die nicht gleichzeitig Fixpunktgerade ist. Erklären Sie diesen Sachverhalt.

d) Ist $ZP_{Z,\beta}$ geradentreu? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Für einige Winkel ist $ZP_{Z,\beta}$ winkeltreu. Für welche?

f) Der Zentralpunkt einer zentrischen Streckung ist Fixpunkt dieser zentrischen Streckung. Warum ist der Zentralpunkt einer Zentralprojektion kein Fixpunkt dieser Zentralprojektion?

Aufgabe 2.3

Klassifikation von Bewegungen nach fixen Elementen
Im Laufe des Semesters werden wir beweisen, dass es genau vier Typen von Bewegungen gibt:

1. *Geradenspiegelungen*
2. *Drehungen*
3. *Verschiebungen*
4. *Schubspiegelungen (NAF von Verschiebung und Geradenspiegelung)*

Die Identität gilt als Spezialfall sowohl der Verschiebungen als auch der Drehungen. Die Identität lassen Sie bitte bei den Folgenden Betrachtungen außen vor.
Ordnen Sie diese Typen von Bewegungen den folgenden Eigenschaften zu:

1) Die Bewegung hat keinen Fixpunkt.

2) Die Bewegung hat genau einen Fixpunkt.

3) Die Bewegung hat genau zwei Fixpunkte.

4) Die Bewegung hat genau eine Fixpunktgerade.

5) Die Bewegung hat mehr als drei paarweise verschiedene Fixpunkte.

6) Die Bewegung hat genau drei nichtkollineare Fixpunkte.

7) Die Bewegung hat genau eine Fixgerade.

8) Die Bewegung hat keine Fixpunktgerade.

Aufgabe 2.4

Berechnung eines Fixpunktes
Wir betrachten die NAF der beiden Geradenspiegelungen S_g und S_h. Die Spiegelachsen g und h werden bzgl. eines kartesuschen Koordinatensytems wie folgt beschrieben:

$g \;\; y(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$

$h \;\; y(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

Geben Sie die Koordinaten des Fixpunktes von $S_g \circ S_h$ an.