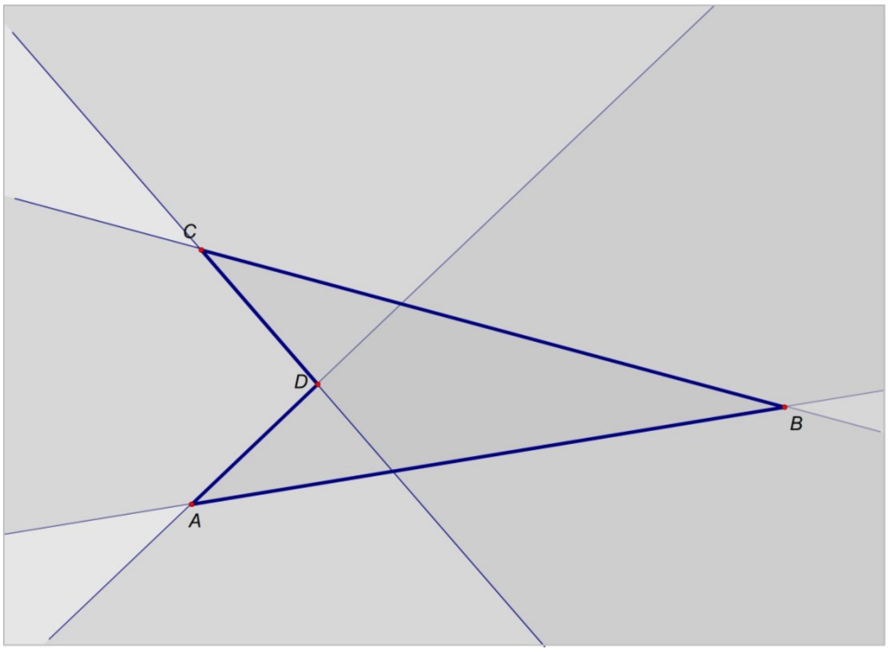
Lösungen zu den Weihnachtsübungsaufgaben

Aufgabe 1:

Definition: (Inneres eines Vierecks)
Das Innere eines Vierecks $\overline{ABCD}$ ist die Schnittmenge der folgenden Halbebenen:
$ABC^+, BCD^+, CDA^+, DAB^+$.

Diese Definition liefert nur für konvexe Vierecke das, was wir als Inneres eines Vierecks verstehen wollen. Die folgende Abbildung wendet die Definition auf ein nicht konvexes Viereck an:



Zur Generierung der Abbildung wurden die grafischen Darstellungen der Halbebenen $ABC^+, BCD^+, CDA^+, DAB^+$ in verschiedene aufeinanderliegende Ebenen des Grafiksystems gelegt und mit einer Transparenz von 40% ausgestattet. Das was wir eigentlich unter dem Inneren des Vierecks $\overline{ABCD}$ verstehen wollen müsste jetzt einheitlich in ein und derselben Helligkeit eingefärbt sein. Wie wir sehen ist dem nicht so.

Aufgabe 2:

Teile und Herrsche! Wir zerlegen das Viereck in zwei Teildreiecke und vereinigen das Innere dieser beiden Teildreiecke.

Definition: (Inneres eines Vierecks)
Unter dem Inneren eines Vierecks $\overline{ABCD}$ versteht man die Vereinigungsmenge der beiden Punktmengen, die jeweils das Innere der folgenden beiden Dreiecke bilden:

- $\overline{ABC}$ und $\overline{ACD}$ falls die Punktmengen die jeweils Innere dieser beiden Dreiecke (ohne die Dreieckseiten) disjunkt sind,
- $\overline{ABD}$ und $\overline{BCD}$ sonst.

Aufgabe 3:

Definition: (konvexes Viereck)
Ein Viereck $\overline{ABCD}$ ist konvex, wenn sich seine Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ schneiden.

Aufgabe 4:

Definition I: (konvexes Viereck entsprechend der üblichen Definition einer konvexen Punktmenge)

> Ein Viereck $\overline{ABCD}$ ist konvex, wenn zu zwei beliebigen Punkte *A* und *B* aus dem Inneren des Vierecks $\overline{ABCD}$ die gesamte Strecke $\overline{AB}$ im Inneren des Vierecks $\overline{ABCD}$ liegt.

Definition II: (konvexes Viereck entsprechend Aufgabe 3)

> Ein Viereck $\overline{ABCD}$ ist konvex, wenn sich seine Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ schneiden.

Wir haben zu zeigen, dass die beiden Definitionen äquivalent zueinander sind:

Satz I: $(I \rightarrow II)$

> Wenn für ein Viereck $\overline{ABCD}$ gilt, dass die Verbindungsstrecke $\overline{EF}$ zweier beliebiger Punkte *E* und *F* aus dem Inneren von $\overline{ABCD}$ vollständig im Inneren von $\overline{ABCD}$ liegt, dann schneiden sich die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.

Satz II: $(II \rightarrow I)$

> Wenn sich die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ eines Vierecks $\overline{ABCD}$ schneiden, dann liegt mit zwei beliebigen Punkte *E* und *F* aus dem Inneren von $\overline{ABCD}$ auch die gesamte Verbindungsstrecke $\overline{EF}$ im Inneren von $\overline{ABCD}$.

Beweis von Satz I:

Voraussetzung:

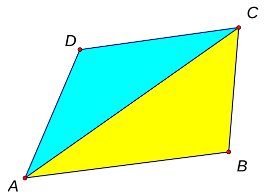
> Es sei $\overline{ABCD}$ ein Viereck mit der Eigenschaft, dass zu zwei Punkten *E* und *F* aus $I(\overline{ABCD})$ die gesamte Strecke $\overline{EF}$ in $I(\overline{ABCD})$ liegt.

Behauptung:

> Wir haben zu zeigen, dass sich die Diagonalen von $\overline{ABCD}$ schneiden.

Wir betrachten das Innere des Vierecks $\overline{ABCD}$. Es handelt sich dabei o.B.d.A. um die Vereinigungsmenge $I(\overline{ABC}) \cup I(\overline{ACD})$, wobei $\overline{ABC}$ und $\overline{ACD}$ zwei Dreiecke sind, die das Viereck $\overline{ABCD}$ bilden[1]. Entsprechend der Definition aus Aufgabe 2 gilt $I(\overline{ABC}) \cup I(\overline{ACD}) = \emptyset$, wobei wir die gemeinsame Strecke der beiden Dreiecke nicht berücksichtigen:

[1] Genauer: Alle Seiten der beiden Dreiecke außer der Seite, die beide Dreiecke gemeinsam haben, bilden das Viereck



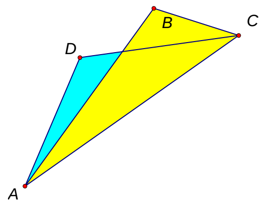
Nach unserer Auffassung gehören die restlichen Seiten der beiden Teildreiecke mit zu dem Inneren des Vierecks (Halbebenen wurden zum Schnitt gebracht, die Träger gehören zu den Halbebenen).

Nach Voraussetzung liegen damit beide Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ vollständig im Inneren von $\overline{ABCD}$.

Wenn wir zeigen könnten, dass die Punkte *B* und *D* auf verschiedenen Seiten der Geraden AC liegen, wären wir fertig: Die Strecke $\overline{BD}$ hätte jetzt einen gemeinsamen Punkt mit der Geraden AC. Da $\overline{BD}$ vollständig im Inneren von Viereck $\overline{ABCD}$ liegt, könnte sich dieser gemeinsame Punkt nur auf dem Teil der Geraden AC befinden, der auch im Inneren von Viereck $\overline{ABCD}$ liegt.

Es bleibt also zu zeigen, dass sich *B* und *D* auf verschiedenen Seiten bezüglich AC befinden.

Hierzu nehmen wir an, dass dem nicht so ist. Die beiden Punkte *B* und *D* mögen sich also nach unserer Annahme auf ein und derselben Seite von AC befinden:



Bemerkung: Aus schreibtechnischen Gründen wollen wir für die folgende Beweisführung vereinbaren, dass, wenn von den Teildreiecken des Vierecks die Rede ist, immer das jeweilige Dreieck und sein Inneres gemeint sind. Ebenso erwähnen wir nicht mehr, dass die gemeinsame Strecke der beiden Teildreiecke bezüglich der Disjunktheit der Teildreiecke keine Rolle spielt.

Die beiden Teildreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{ACD}$ haben die Strecke $\overline{AC}$ gemeinsam. Der Strahl AC^+ ist somit sowohl für $\overline{ABC}$ als auch für $\overline{ACD}$ Schenkel des jeweiligen Innenwinkels bei A. Die anderen Schenkel dieser beiden Winkel liegen wegen unserer Annahme in ein und derselben Halbebene bezüglich *AC*. Einer der folgenden drei Fälle muss jetzt auftreten:

1. AB^+ liegt im Inneren von Winkel $\measuredangle CAD$,
2. AD^+ liegt im Inneren von Winkel $\measuredangle CAB$,
3. AB^+ und AD^+ sind identisch.

In jedem dieser Fälle wäre das Innere eines dieser Winkel eine Teilmenge des Inneren des anderen Winkels. Die beiden Teildreiecke wären demzufolge nicht disjunkt. Da unsere beiden Teildreiecke aber das Innere des Vierecks $\overline{ABCD}$ bilden, geht das nicht. Die Annahme, dass *D* und *B* nicht auf verschiedenen Seiten von *AC* liegen ist zu verwerfen.

Satz I ist damit bewiesen.

Beweis von Satz II:

Voraussetzung:

$\overline{ABCD}$ ist ein Viereck, dessen Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sich schneiden.

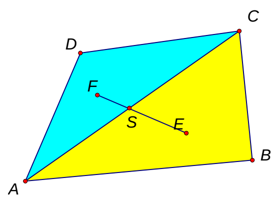
Behauptung:

Mit zwei beliebigen Punkten *E* und *F* aus dem Inneren von $\overline{ABCD}$ liegt auch die gesamte Verbindungsstrecke $\overline{EF}$ im Inneren des Vierecks $\overline{ABCD}$.

Zunächst charakterisieren wir auch hier noch einmal das Innere von $\overline{ABCD}$. O.B.d.A. können wir wieder davon ausgehen, dass dieses die Vereinigungsmenge der beiden Teildreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{ACD}$ ist.

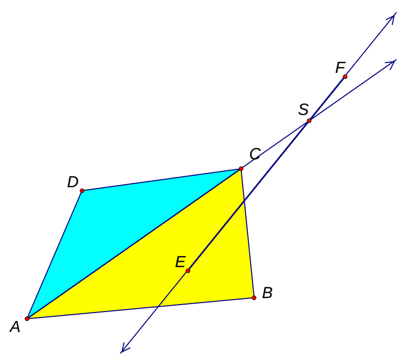
Es seien nun *E* und *F* zwei Punkte aus dieser Vereinigungsmenge. Wenn beide Punkte gleichzeitig zu einem der Teildreiecke gehören, dann gehört auch wegen der Konvexität eines jeden Dreiecks ihre Verbindungsstrecke zu dem Teildreieck, womit sie logischerweise auch vollständig in der Vereinigungsmenge beider Teildreiecke liegt.

Interessant ist also nur der Fall, wenn etwa *E* zu $\overline{ABC}$ und *F* zu $\overline{ACD}$ gehören. Sollte der Spezialfall auftreten, dass einer der beiden Punkte zu $\overline{AC}$ gehört ist auch alles klar. Beide Punkte gehören dann zu einem konvexen Teildreieck. Wir schließen für die folgenden Überlegungen also diesen Fall aus und gehen davon aus, dass beide Punkte zum „echten" Inneren des jeweiligen Teildreiecks gehören.



Da sich die beiden Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ schneiden, liegen die Punkte *B* und *D* auf verschiedenen Seiten bezüglich der Geraden *AC*. Wegen der Disjunktheit der beiden Teildreiecke liegen die beiden Teildreiecke damit insgesamt auf verschiedenen Seiten von *AC*. Hieraus folgt, dass die Stecke $\overline{EF}$ mit der Geraden *AC* einen gemeinsamen Schnittpunkt *S* hat. Wenn wir zeigen könnten, dass *S* auf $\overline{AC}$ liegt, wären wir fertig: Die Teilstrecke $\overline{SE}$ gehört dann wegen der Konvexität von $\overline{ABC}$ vollständig zu diesem Dreieck. Analoges gilt für $\overline{SF}$ bezüglich $\overline{ACD}$. Damit liegt $\overline{EF}$ vollständig in der Vereinigungsmenge beider Dreiecke, sprich im Inneren des Vierecks $\overline{ABCD}$.

Bleibt also zu zeigen, dass *S* ein Punkt der Strecke $\overline{AC}$ ist. Wir nehmen an, dem wäre nicht so:



Zunächst ist klar, dass S der einzige Schnittpunkt von *EF* mit *AC* ist. Andernfalls wären die beiden Geraden identisch und damit sowohl *F* als auch *E* Punkte von *AC*. Gerade das schließen wir aber bei den derzeitigen Betrachtungen aus.

...