Dr. Michael Gieding
ph-heidelberg.de/wp/gieding

Einführung in die Geometrie

Skript zur gleichnamigen Vorlesung im Wintersemester 2006/2007

Kapitel 1: Axiomatik

Vorlesung 7: Abstandsaxiome

2 Abstandsaxiome

2.1 Begriff des Abstandes

2.1.1 Dreiecke im täglichen Leben

Dreiecke sind etwas Besonderes.

In Abbildung 1 ist ein dreibeiniger Tisch zu sehen. Die sind zwar unüblich, haben jedoch gegenüber den vierbeinigen Vertretern ihrer Art den Vorteil, dass sie auch bei gewissen Schwankungen hinsichtlich der Beinlänge noch stehen „ohne zu kippeln“.

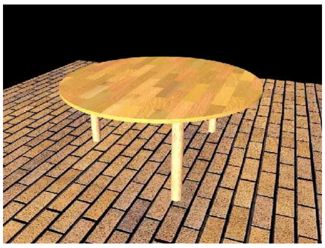


Abbildung 1

Wenn ein Tischler[1] einen rechteckigen Rahmen baut, so wird er diesen aus Stabilitätsgründen verstärken (Abbildung 2).

Das Besondere bei einem Dreieck ist offenbar, dass durch die Seitenlängen bzw. die Abstände der Eckpunkte auch die Winkel des Dreiecks eindeutig festgelegt sind.

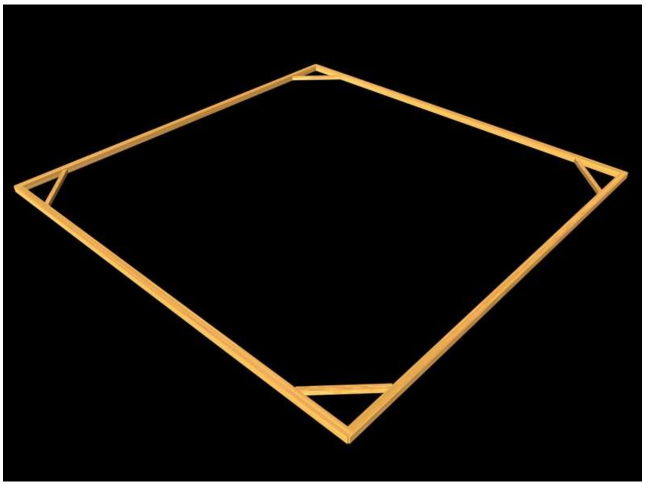


Abbildung 2

Diese Eigenschaft von Dreiecken wird uns später als Dreieckskongruenzsatz SSS begegnen: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen Seiten übereinstimmen. Übereinstimmen bedeutet, dass die Seiten der Dreiecke jeweils die selbe Länge haben. Oder anders ausgedrückt: Die Abstände zwischen den Eckpunkten sind bei beiden Dreiecken gleich.

Im Rahmen unserer axiomatischen Grundlegung der Geometrie trat der Abstandsbegriff noch nicht auf, d.h. wir wissen eigentlich noch nicht, was der Abstand zweier Punkte ist.

Für eine Grundlegung des Abstandsbegriffs scheint es lohnenswert, zu untersuchen, wie es sich mit den Abstände (nach unserem bisherigem Verständnis aus der Schule) in einem Dreieck verhält.

2.1.2 Schüler entdecken die Dreiecksungleichung

Dreieckskonstruktionen sind seit jeher fester Bestandteil des Geometrieunterrichts in der Schule. Neben solchen allgemeinen Zielen wie Erziehung zur Exaktheit und Sauberkeit bei Konstruktionen, geht es bei diesen Aufgaben auch darum, dass die Schüler die Gesetzmäßigkeiten ihrer Umwelt durch eigene Tätigkeit selbst erfahren.

---

[1] süddeutsch: Schreiner

Nebenbei sei an dieser Stelle bemerkt, dass Geometriesoftware diesbezüglich nur eine schöne Ergänzung sein kann. Letztlich ist die diskrete[2] zweidimensionale Welt dieser Programme doch nur ein kleiner erbärmlicher Ausschnitt der realen Welt. Nur dadurch, dass der Schüler mit einem richtigen Zirkel in der realen Welt seine Erfahrungen zu Abständen und dergleichen macht, wird er auch wirklich fundiertes Wissen zur Umwelt erlangen.

Die einfachsten Dreieckskonstruktionen sind die, bei denen die Längen der drei Seiten eines Dreiecks gegeben sind. In der Sprache der Abstände: Alle drei Abstände die die Eckpunkte des Dreiecks zueinander haben sind gegeben.

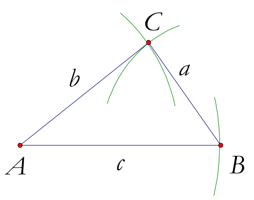
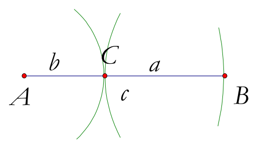
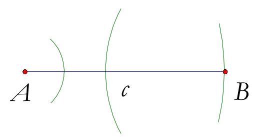
Abstände und Streckenlängen sind offenbar Zahlen.[3] Unter Berücksichtigung unserer bisherigen Erfahrungen aus der Schule wird es sich dabei um reelle Zahlen handeln.

Der Lehrer, der Konstruktionsaufgaben auf das eigentliche Generieren einer Zeichnung durch die Schüler reduziert, verschenkt eine Reihe von Potenzen hinsichtlich verschiedenster Ziele des Mathematikunterrichts. Stellvertretend sei in diesem Zusammenhang das *Begründen* genannt.

Aus didaktischer Sicht werden Konstruktionsaufgaben zu einem bestimmten Problemkreis erst dann vollständig, wenn die Schüler sich sowohl mit Aufgaben mit mehreren Lösungsmöglichkeiten[4] als auch mit unlösbaren Aufgaben auseinandersetzen müssen.

Im Kontext der Dreieckskonstruktionsaufgaben nach SSS bedeutet das, dass die Schüler auch solche Seitenlängen vorgegeben bekommen, die es nicht erlauben, ein entsprechendes Dreieck zu konstruieren.

Im folgenden sind die drei Klassen von Konstruktionsaufgaben dargestellt, die sich bezüglich der Dreieckskonstruktionen nach SSS ergeben:

<table>
<tr><td rowspan="2">Typ 1:
Konstruktion eindeutig möglich</td><td colspan="2">Typ 2:
Konstruktion nicht möglich</td></tr>
<tr><td>Typ 2.a:
„Dreieck entartet zur Strecke“</td><td>Typ 2.b:
Dreieck existiert nicht</td></tr>
<tr><td>gegeben:
a=3 cm, b=4 cm, c=5 cm</td><td>gegeben:
a=3 cm, b=2 cm, c=5 cm</td><td>gegeben:
a=3 cm, b=1 cm, c=5 cm</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Letzlich haben die Schüler durch derartige Konstruktionsaufgaben die so genannte Dreiecksungleichung entdeckt: Zwei Seiten eines Dreiecks sind zusammen immer länger als die dritte Seite.

Wichtig für die Erreichung der Lernziele des Mathematikunterrichts ist aber die Begründung der Nichtkonstruierbarkeit etwa bei Typ 2.b:

---

[2] Auch wenn moderne Bildschirme über ein mittlerweile beachtliches Auflösungsvermögen verfügen, kann man die Anzahl der Verfügung stehenden Punkte mit einem kleinen Teil der natürlichen Zahlen aufzählen. Daran wird auch eine noch höhere Auflösung nichts ändern.

[3] Maßeinheiten wie m und cm sind in der „reinen“ Mathematik irrelevant

[4] Falls der Aufgabentyp mehrer Lösungsmöglichkeiten zuläßt.

1. Wir wissen: Zwischen zwei Punkten gibt es genau eine kürzeste Verbindung, nämlich die Verbindungsstrecke.
2. Die Strecke c ist die[5] kürzeste Verbindung zwischen den beiden Punkten A und B.
3. Da die Strecke die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist, müssen alle anderen „Wege“, die von A nach B führen länger als c sein.
4. Weil aber die Strecken a und b zusammen nicht einmal so lang wie die Strecke c sind, können sie den Punkt C nicht gemeinsam als Endpunkt haben und damit eine Verbindung von A nach B bilden.[6]

Analog kann eine Begründung hinsichtlich der Aufgaben des Typs 2.a gestaltet werden:

4. Weil aber die Strecken a und b zusammen so lang wie die Strecke c sind, muß ihr gemeinsamer Endpunkt C auf der Strecke c liegen.

Mit den Klassen von Konstruktionsaufgaben zur Dreieckskonstruktion nach SSS haben wir letztlich die wesentlichen Eigenschaften des Begriffes Abstand zweier Punkte erfaßt.

In unserem axiomatischen Aufbau der Geometrie werden wir insbesondere mittels der Dreiecksungleichung axiomatisch festlegen, was unter dem Abstand zweier Punkte zu verstehen ist.

2.2 Die Axiomengruppe des Abstandes

2.2.1 Die Abstandsaxiome

Axiom A/1:

Zu zwei beliebigen Punkte A und B gibt es eine nichtnegative reelle Zahl d mit $d = 0 \Leftrightarrow A = B$. (Diese Zahl wird als Abstand $|AB|$ der Punkte A und B bezeichnet.)

Axiom A/2:

Für zwei beliebige Punkte A und B gilt: $|AB| = |BA|$.

---

[5] Überdenken Sie Ihre Sprache vor den Schülern hinsichtlich der Verwendung von bestimmten und unbestimmten Artikeln.

[6] Man überlege sich weitere Formulierungen der Begründung, die eventuell noch näher an den Formulierungsmöglichkeiten von Haupt- und Realschülern sind.

Axiom A/3:

Für drei beliebige Punkte A, B und C gilt:

$$|AB| + |BC| \geq |AC|.$$

Falls koll(A, B, C) so gilt eine der drei Gleichungen:

$$|AB| + |BC| = |AC|$$
$$|AC| + |CB| = |AB|$$
$$|BA| + |AC| = |BC|$$

Ist umgekehrt eine dieser drei Gleichungen erfüllt, so gilt koll(A, B, C).

2.2.2 *Die Zwischenrelation*

Definition A.1: (Zwischenrelation)

Ein Punkt B liegt zwischen zwei Punkten A und C, wenn $|AB| + |BC| = |AC|$ gilt und der Punkt B sowohl von A als auch von B verschieden ist.

Schreibweise: Zw(A, B, C)

Unmittelbar einsichtig ist der folgende Satz:

Satz A.1:

Aus Zw(A, B, C) folgt Zw(C, B, A).

Satz A.2:

Aus Zw(A, B, C) folgt koll(A, B, C).

Satz A.3:

Es sei koll(A, B, C) mit A, B, C sind paarweise verschieden. Dann gilt Zw(A, B, C) oder Zw(A, C, B) oder Zw(B, A, C)

Beweise: Übungsaufgaben

2.2.3 *Ein Modell für die Inzidenz- und die Abstandsaxiome*

Hinsichtlich der Inzidenz haben wir bereits geklärt, dass es sich folgenden um ein Modell handelt:

Menge der Punkte $\boldsymbol{P} := \{A, B, C, D\}$

Menge der Ebenen $\boldsymbol{E} := \{\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \{B, C, D\}\}$

Menge der Geraden $\boldsymbol{G} := \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$

Inzidenz: Elementbeziehung

Wir zeigen jetzt, dass dieses Modell auch die Abstandsaxiome erfüllt. Hierzu ist der Begriff des Abstandes zunächst geeignet zu interpretieren. Wir erledigen diese Aufgabe durch die folgenden Festlegungen:

Zwei nichidentische Punkte haben den Abstand 1 und zwei identische Punkte den Abstand 0.

Damit sind wir auch schon fast fertig.

Die Axiome *A/1* und *A/2* sind trivialerweise erfüllt.

Da unsere Geraden nur aus jeweils zwei Punkten bestehen, dürfte der Fall, dass einer von drei Modellpunkten zwischen den anderen beiden liegt, nicht auftreten.

Es seien X, Y und Z drei beliebige Modellpunkte.

Fall 1: Die Punkte sind paarweise verschieden

Es gilt nach unserer Festlegung des Abstandes im Modell:

$$|XY| = 1, |YZ| = 1, |XZ| = 1$$

Addiert man zwei dieser Abstände, so ist die Summe immer 2. 2 ist größer als der nicht als Summand verwendete Abstand 1.

Fall 2: Einer der Abstände ist 0. Sei dieses o.B.d.A der Abstand $|XY|$

$$|XY| = 0, |YZ| = 1, |XZ| = 1$$

$$|XY| + |YZ| = 0 + 1 = 1 = |XZ|,$$

$$|XY| + |XZ| = 0 + 1 = 1 = |YZ|,$$

$$|YZ| + |XZ| = 1 + 1 = 2 > |XY|,$$

Fall 3: Zwei der Abstände sind gleich 0:

In diesem Fall ist auch der dritte der Abstände gleich Null:

Zwei Punkte haben den Abstand 0, wenn sie identisch sind. Wegen der Transitivität der Relation „*zwei Punkte sind identisch*“ folgt sofort, dass alle drei Abstände Null sein müssen.

Wir haben es damit immer mit der Gleichung 0+0=0 zu tun.

Mehr als die drei aufgezeigten Fälle können nicht auftreten. In jedem Fall war das Axiom *A/3* erfüllt.

2.2.4 *Wie passt das zu unserem bisherigen Abstandsbegriff aus der Schule*

Abstände werden in der SI entweder gemessen oder mittels des Pythagoras berechnet.

Für zwei Punkte des $\mathbb{R}^2$ ergibt sich der Abstand mittels des Satzes von Pythagoras wie folgt[7]:

[7] In der Schule ist natürlich klar, dass die Länge einer Strecke und der abstand ihrer Endpunkte ein und denselben Wert haben. Hier werden wir diesen Zusammenhang später definieren.

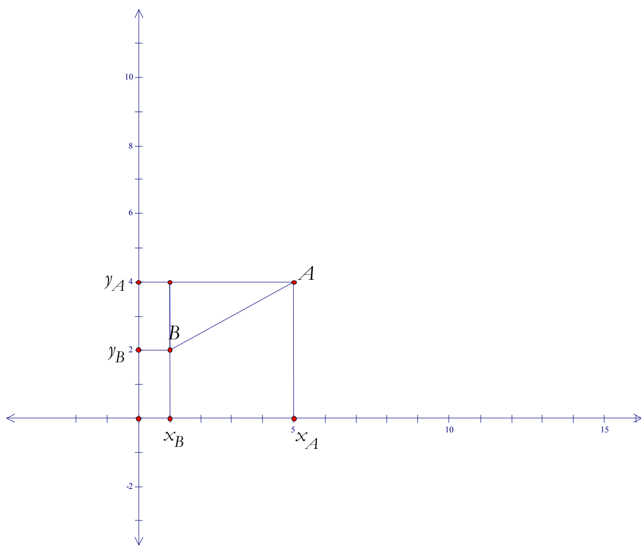


Abbildung 3

Unter Berücksichtigung von Abbildung 3 gilt nach unserem bisherigen Verständniss bezüglich des Begriffs Abstand:

$$(*)\ |AB| := \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Diese Festlegung des Begriffs Abstand erfüllt die Axiome *A/1* bis *A/3*:

Axiom *A/1*:

Das Potenzieren (Quadrieren) liefert immer positive relle Zahlen. Die Summe zweier positiver reeller Zahlen ergibt eine positive relle Zahl. Eine solche postive reelle Zahl liegt im Definitionsbereich der Wurzelfunktion, welche diese wiederum auf eine positive reelle Zahl abbildet.

Axiom *A/2*:

(i.) $|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$, laut Definition (*)

(ii.) $|BA| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$, ebenso

(iii.) zu zeigen:
$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

(iv.) iii. ist praktisch gezeigt, wenn die folgende Beziehung nachgewiesen weren kann: (**) $\forall a,b \in \mathbb{R} : (a-b)^2 = (b-a)^2$

(v.) Nachweis von (**):
Es seien *a* und *b* zwei reelle Zahlen. Dann gilt:
$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + a^2 = (b-a)^2$$

Axiom *A/3*:

Es seien *A*, *B* und *C* drei Punkte des $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten (x_A,y_A), (x_B,y_B) und (x_C, y_C).

Zu zeigen: $|AB| + |BC| \geq |AC|$

Das heißt es ist zu zeigen:

$$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} + \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} \geq \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

(i.) wissen:

$$(x_A - x_C) = (x_A - x_B) + (x_B - x_C)$$
$$(y_A - y_C) = (y_A - y_B) + (y_B - y_C)$$

weiter Übungsaufgabe (Filler S. 74 Aufgabe 4)

2.3 Definitionen auf der Grundlage der Abstandsaxiome und Folgerungen

Definition A.2: (Halbgerade, bzw. Strahl)

Es seien O und A zwei verschiedene Punkte.

Die Mengen OA^+ und OA^- mit

$$OA^+ := \{P \mid P \in \mathsf{P}, \mathrm{Zw}(O, A, P) \vee \mathrm{Zw}(O, P, A)\}$$

$$OA^- := \{P \mid P \in \mathsf{P}, \mathrm{Zw}(P, O, A)\}$$

heißen offene Halbgeraden mit dem Anfangspunkt O.

Die Vereinigungsmenge einer offenen Halbgeraden mit ihrem Anfangspunkt heißt abgeschlossene Halbgerade.

Halbgeraden werden im folgenden auch wie Geraden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Wenn $OA^+=p$, dann verstehen wir unter p^- die Halbgerade OA^-.

Satz A.4:

Es sei O ein Punkt einer Geraden g. Die Teilmengen OA^+, OA^- und $\{O\}$ bilden eine Klasseneinteilung der Geraden g.

Beweis: Übungsaufgabe (Man erinnere sich an die Übung im Raum A106)

Definition A.3: (Winkel)

Die Vereinigungsmenge zweier abgeschlossener Halbgeraden mit dem gemeinsamen Anfangspunkt S heißt Winkel. S heißt der Scheitelpunkt des Winkels. Die Halbgeraden heißen Schenkel des Winkels.

Es seien $SA^+=p$ und $SD^+=q$ die Schenkel eines Winkels. Folgende Bezeichnungsweisen sind üblich: $\angle ASB$, $\angle pq$, $\angle SA^+SB^+$. Ferner werden Winkel mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet.

Definition A.4.: (Scheitelwinkel)

Der Winkel $\angle p^- q^-$ heißt Scheitelwinkel des Winkels $\angle pq$.

Definition A.5: (Nebenwinkel)

Die Winkel $\angle pq^-$ und $\angle p^- q$ heißen Nebenwinkel des Winkels $\angle pq$.

Definition A.6: (gestreckter Winkel)

Ein Winkel $\angle pp^-$ ist ein gestreckter Winkel.

Definition A.7: (Nullwinkel)

Ein Winkel $\angle pp$ heißt Nullwinkel.

Definition A.8: (Strecke)

Als offene Strecke (AB) bezeichnet man die Menge aller Punkte, die zwischen A und B liegen.

Als abgeschlossene Strecke (oder kurz Strecke) $\overline{AB}$ bezeichnet man die Vereinigungsmenge der offenen Strecke (AB) mit den Punkten A und B.

Die Punkte A und B heißen Endpunkte der Strecke $\overline{AB}$.

Eine Strecke $\overline{AB}$ wird auch Verbindungstrecke der beiden Punkte A und B genannt.

Der Abstand $|AB|$ heißt Länge der Strecke $\overline{AB}$.

Definition A.9: (Dreieck)

Es seien A, B und C drei nichtkollineare Punkte. Unter dem Dreieck $\overline{ABC}$ (oder auch ΔABC) versteht man die Vereinigungsmenge der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$. Die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ heißen Seiten des Dreiecks $\overline{ABC}$. Die Punkte A, B und C heißen die Eckpunkte des Dreiecks $\overline{ABC}$.

Die Winkel $\angle CAB$, $\angle ABC$, $\angle BCA$ heißen Innenwinkel des Dreiecks $\overline{ABC}$. Sie werden auch mit Winkel beim Eckpunkt A, Winkel beim Eckpunkt B und Winkel beim Eckpunkt C bezeichnet.

Die Nebenwinkel der Innenwinkel eines Dreiecks heißen Außenwinkel des Dreiecks.

Bemerkung:

Zur Übung hatten wir schon rein intuitiv den Begriff der Halbebene definiert:

Es seien in einer Ebene ein Punkt P und eine Gerade g gegeben. Alle Punkte die in der Ebene mit P auf derselben Seite von g liegen bilden eine Halbebene bezüglich der Trägergeraden g. Alle Punkte die nicht mit P auf derselben Seite von g liegen bilden eine weitere Halbebene bezüglich g, wobei ein Punkt Q dann nicht mit P auf derselben Seite von g liegt, wenn die Verbindungsstrecke $\overline{PQ}$ die Gerade g nicht schneidet. Das Modell der Inzidenz- und Abstandsaxiome aus 2.2.3 zeigt, dass es der Begriff Halbebene noch nicht definiert werden kann. Letztlich liegt es daran, dass Geraden noch nicht mehr als zwei Punkte beinhalten müssen. Bei zwei Punkten fällt die Sache mit dem Schneiden schwer. Die Anordnungsaxiome werden Abhilfe schaffen.