

Axiomatischer Aufbau der Geometrie

Bei **axiomatisch aufgebauten Theorien** existieren heute:

2 Arten von Begriffen:

- Grundbegriffe (werden nicht definiert und das verwendete Axiomensystem legt fest, welche Begriffe Grundbegriffe sind)
- Abgeleitete (definierte) Begriffe (Definitionen)

2 Arten von Aussagen:

- **Axiome** (Grundaussagen, Grundannahmen)
- Sätze (abgeleitete Aussagen, logisch deduziert)

Axiomatischer Aufbau der Geometrie

David Hilbert (1899):

*Wir denken 3 verschiedene Systeme von Dingen;
die Dinge des 1. Systems nennen wir Punkte...;
die Dinge des 2. Systems nennen wir Geraden...;
die Dinge des 3. Systems nennen wir Ebenen... .*

Wir denken die Punkte, Geraden und Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen“, „zwischen“, „parallel“, „kongruent“, „stetig“: die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome der Geometrie.

„Man muss jederzeit anstelle von Punkten, Geraden und Ebenen Tische, Stühle und Bierseidel sagen können.“

4. Axiomatischer Aufbau der Geometrie

Bild 1:
Normschach-
figuren

Bild 2:
Menschen-
schach

Bild 3: Antike
Schachfiguren

Bild 4:
Kunstschach-
figuren

- Die Figuren der abgebildeten Schachsets sehen völlig unterschiedlich aus
- Die Zugeigenschaften der Figuren bleiben aber unabhängig vom Aussehen erhalten, ein Läufer darf z. B. immer nur diagonal ziehen
- Auch die Eigenschaften zwischen den verschiedenen Figuren bleiben immer gleich z. B. die Regeln für das Werfen einer Figur
- Auch die Spielregeln sind verbindlich festgelegt

Axiomatischer Aufbau der Geometrie

Forderungen an ein Axiomensystem:

- Widerspruchsfreiheit
- Vollständigkeit (alle geometrischen Aussagen lassen sich letztendlich auf die Axiome zurückführen)
- Unabhängigkeit (Minimalität): Stichwort: [Parallelenaxiom](#)

Das Euklidische Axiomensystem wurde im 19./20. Jahrhundert vervollständigt und präzisiert:

Moritz Pasch (1843-1930)	Anordnungsaxiom
David Hilbert (1862-1943)	1899 bekanntestes vollständiges Axiomensystem der Geometrie
A. N. Kolmogorov (1903-1987)	Vereinfachte in den 60er Jahren das Hilbert'sche Axiomensystem

Axiomatischer Aufbau der Geometrie

Forderungen an ein Axiomensystem:

- Widerspruchsfreiheit
- Vollständigkeit (alle geometrischen Aussagen lassen sich letztendlich auf die Axiome zurückführen)
- Unabhängigkeit (Minimalität): Stichwort: [Parallelenaxiom](#)

Das Euklidische Axiomensystem wurde im 19./20. Jahrhundert vervollständigt und präzisiert:

Moritz Pasch (1843-1930)	Anordnungsaxiom
David Hilbert (1862-1943)	1899 bekanntestes vollständiges Axiomensystem der Geometrie
A. N. Kolmogorov (1903-1987)	Vereinfachte in den 60er Jahren das Hilbert'sche Axiomensystem

Axiomatischer Aufbau der Geometrie

Die Inzidenzaxiome der ebenen Geometrie:

incidere (lat.) - *begegnen, befallen, hineinfallen*

Grundbegriffe: Punkt, Gerade

- I/0 Jede Gerade ist eine Punktmenge.
- I/1 Zu zwei beliebigen, voneinander verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, welche diese beiden Punkte enthält.
- I/2 Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.
- I/3 Es existieren (mindestens) drei Punkte, die nicht einer Geraden angehören.

Brief von Farkas Bolyai an seinen Sohn Janos

„Du darfst die Parallelen nicht auf jenem Wege versuchen; ich kenne diesen Weg bis an sein Ende – auch ich habe diese bodenlose Nacht durchmessen, jedes Licht, jede Freude meines Lebens sind in ihr ausgelöscht worden. Ich beschwöre Dich bei Gott! Laß die Lehre von den Parallelen in Frieden – entsetze Dich davor nicht weniger als vor Welch immer für einem lüderlichen Umgang, sie kann Dich um all Deine Ruhe, Deine Gesundheit und um Dein ganzes Lebensglück bringen...

Wenn ich die Parallelen hätte entdecken können, so wäre ich ein Engel geworden...

Es ist unbegreiflich, daß diese unabwendbare Dunkelheit, diese ewige Sonnenfinsternis, dieser Makel der Geometrie zugelassen wurde, diese ewige Wolke an der jungfräulichen Wahrheit“.

Farkas Bolyai (in einem Brief an seinen Sohn Janos Bolyai, 1820)

