1 Gruppenbegriff

1.1 Definitionen und Beispiele

1. Definieren Sie den Begriff Halbgruppe.
2. Geben Sie drei Beispiele für Halbgruppen an. Begründen Sie, dass Ihre Beispiele Halbgruppen sind.
3. Definieren Sie den Begriff Modul.
4. Geben Sie drei Beispiele für Module an. Begründen Sie, dass Ihre Beispiele Module sind.
5. Definieren Sie den Begriff Gruppe.
6. Geben Sie drei Beispiele für endliche Gruppen an. Begründen Sie, dass Ihre Beispiele Gruppen sind.
7. Geben Sie drei Beispiele für unendliche Gruppen an. Begründen Sie, dass Ihre Beispiele Gruppen sind.
8. Definieren Sie, was unter einer Abel'schen Gruppe zu verstehen ist.
9. Geben Sie drei Beispiele für Abel'sche Gruppen an. Begründen Sie, dass Ihre Beispiele Abel'sche Gruppen sind.
10. Geben Sie drei Beispiele für Gruppen an, die keine Abel'schen Gruppen sind. Begründen Sie, dass Ihre Beispiele keine Abel'schen Gruppen sind.
11. Unter einer Bewegung versteht man eine längentreue Abbildung der Ebene auf sich. Beweisen Sie, dass die Menge der Bewegungen bzgl. der NAF von Abbildungen eine Gruppe bildet.
12. Es sei M die Menge aller 2×2 Matrizen und $\cdot$ die Matrizenmultiplikation. Beweisen Sie: $[M, \cdot]$ ist keine Gruppe.

1.2 Eigenschaften von Gruppen

1. Es sei $[G, \otimes]$ Gruppe. Beweisen Sie: Wenn e Linkseinselement von $[G, \otimes]$, dann ist e auch Rechtseinselement von $[G, \otimes]$.
2. Es sei $[G, \otimes]$ Gruppe. Beweisen Sie: Wenn a^{-1} das Linksinverse von $a \in G$ ist, dann ist a^{-1} auch das Rechtsinverse von a.
3. Beweisen Sie: Jede Gruppe hat genau eine Einselement.
4. Beweisen Sie: In einer Gruppe gibt es zu jedem Element dieser Gruppe genau eine Inverses.
5. Es sei $[M, \otimes]$ ein Modul. Beweisen Sie: $[M, \otimes]$ ist genau dann Gruppe, wenn alle Gleichungen vom Typ $a \otimes x = b$ und $y \otimes a = b$ für beliebige $a, b \in M$ in M eindeutig lösbar sind.
6. Wie macht es sich für die Schülerinnen und Schüler bemerkbar, dass $[\mathbb{N}+]$ und $[\mathbb{N}\cdot]$ jeweils keine Gruppen sind.

7. Ein Modul $[M, \oplus]$ heißt regulär, wenn im Falle der Lösbarkeit der Gleichungen $a \oplus x = b$ bzw. $y \oplus a = b$ diese Gleichungen in M eindeutig lösbar sind. Nennen Sie zwei Beispiele für reguläre Module.

8. Es sei $[G, \otimes]$ eine Gruppe. Beweisen Sie: In der Verknüpfungstafel von $[G, \otimes]$ taucht jedes Element aus G in jeder Spalte und in jeder Zeile genau einmal auf.

1.3 Gruppenordnung und Ordnung eines Gruppenelements

1. Definieren Sie, was unter der Ordnung einer Gruppe zu verstehen ist.

2. Definieren Sie, was unter der Ordnung eines Gruppenelementes verstanden wird.

3. Bestimmen Sie die Gruppenordnung und die Elementordnungen für die folgenden Gruppen.

   (a) Deckabbildungsgruppe des Quadrates,

   (b) Gruppe der Permutationen mit 4 Elementen,

   (c) Gruppe der folgenden Matrizen $M_1, M_2, \ldots, M_{12}$ bzgl. der Matrizenmultiplikation:
   $M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, M_i := M^i, 1 < i < 13$

   (d) Geben Sie eine Gruppe an, in der alle Elemente, die verschieden vom neutralen Element sind, die Ordnung 2 haben.

   (e) Bestimmen Sie die Ordnungen aller Elemente der Gruppe $[\mathbb{Z}_{256}, \oplus]$.

1.4 zyklische Gruppen

1. Definieren Sie: *erzeugendes Element* einer Gruppe.

2. Definieren Sie: *zyklische Gruppe*

3. Beweisen Sie: Jede zyklische Gruppe ist eine Abel'sche Gruppe.

4. Beweisen Sie: Jede Gruppe der Ordnung 3 ist zyklisch.

5. Geben Sie ein Bespiel für eine Gruppe an, in der alle Elemente erzeugend sind.