Existenz und Eindeutigkeit des Lotes von einem Punkt P auf eine Gerade g

Der Beweis der Existenz

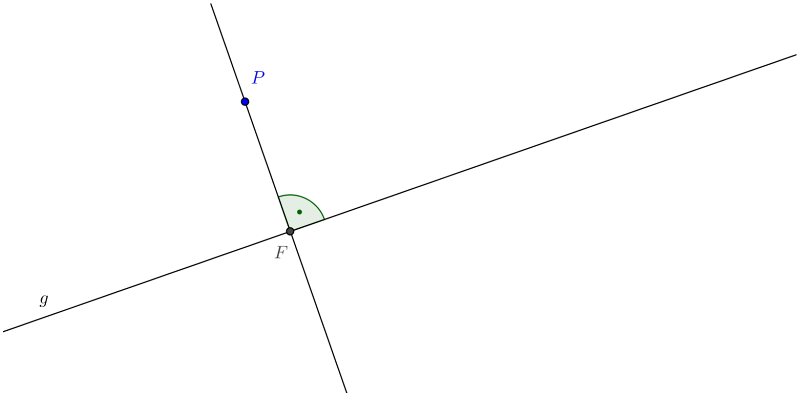
MatheMOOC

9. Januar 2014

Inhaltsverzeichnis

Formulierung der Existenzaussage

Zu jedem Punkt P außerhalb einer Geraden g existiert eine Gerade l, die durch P geht und senkrecht auf g steht.



Die Ausgangslage

Gegeben seien

Die Ausgangslage

Gegeben seien

1. eine Gerade g und

Die Ausgangslage

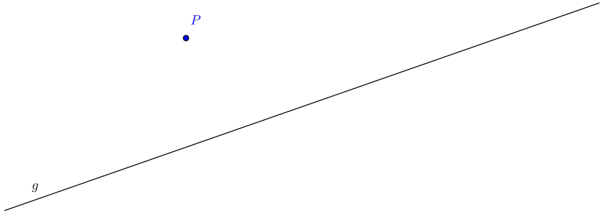
Gegeben seien

1. eine Gerade g und
2. ein Punkt P, der nicht auf g liegt.

Die Ausgangslage

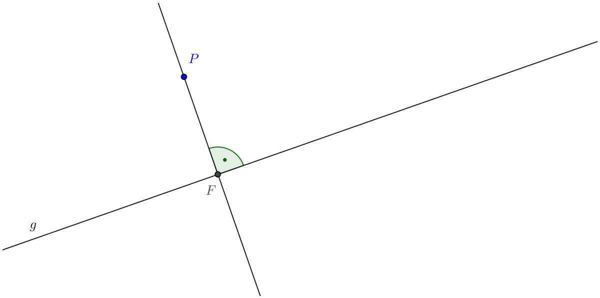
Gegeben seien

1. eine Gerade g und
2. ein Punkt P, der nicht auf g liegt.



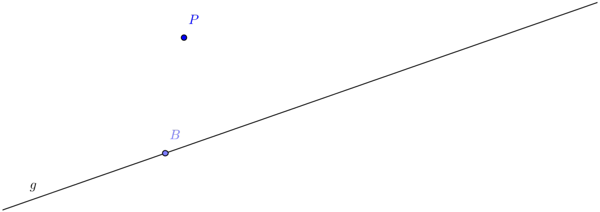
Die Behauptung

Es gibt ein Gerade l, die durch P geht und senkrecht auf g steht.



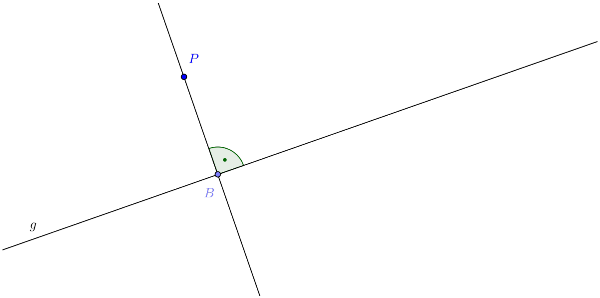
Ein beliebiger Punkt B auf g

Es sei B ein beliebiger Punkt B auf g.



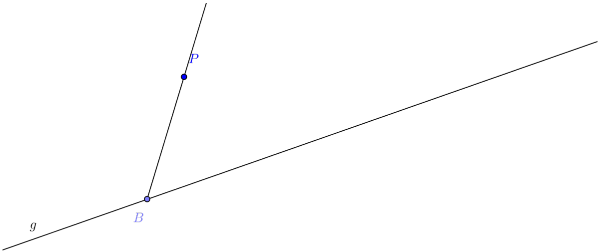
Vielleicht hatten wir schon Glück

Es könnte ja sein:



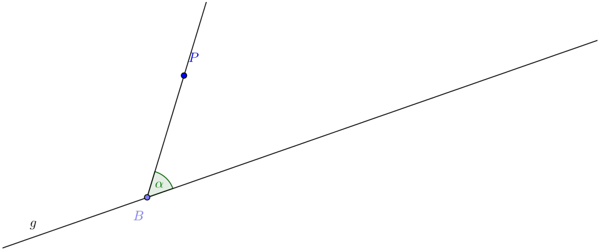
Wahrscheinlich nicht

Wir hätten schon großes Glück haben müssen.



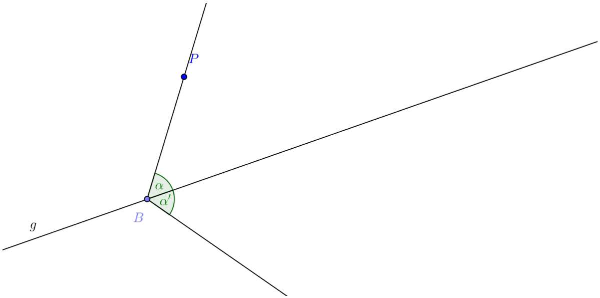
α, ein vom rechten Winkel verschiedener Winkel

Mit α wollen wir einen der Winkel bezeichnen, den BP^+ mit einer der beiden durch B bestimmten Halbgeraden von g bildet:

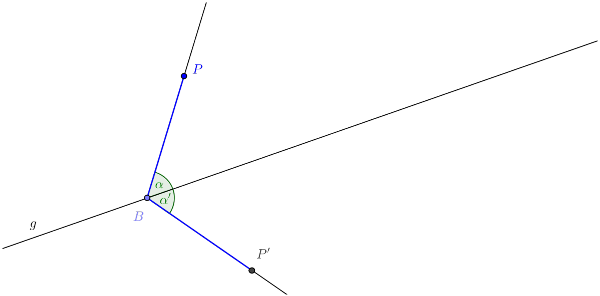


Antragen von α

Wir tragen α als α' an seinen Schenkel auf g in der Halbebene gP^- an.



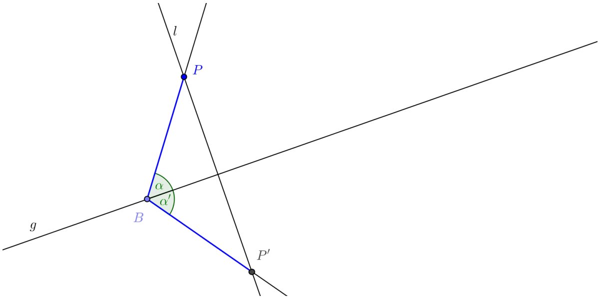
Wir tragen α als α' an seinen Schenkel auf g in der Halbebene gP^{-} an.



mathe · mooc
mathematisch denken!

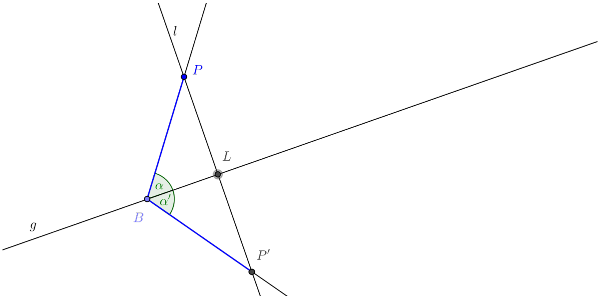
Betrachten die Gerade PP'

Es sei l die durch die beiden Punkte P und P' eindeutig bestimmte Gerade:



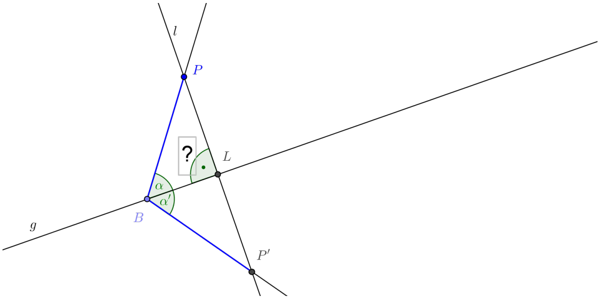
L, der Schnittpunkt von l mit g

$L := l \cap g$:



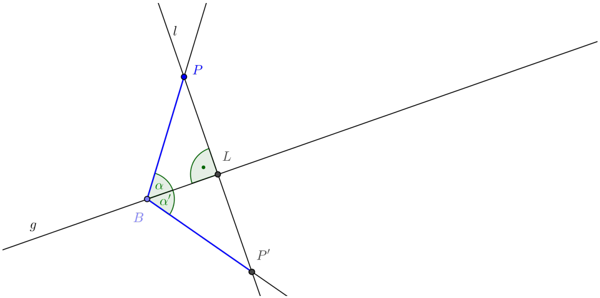
Das sieht nach senkrecht aus

Wenn wir jetzt noch zeigen könnten, dass $\angle PLB$ ein Rechter ist, wären wir fertig.



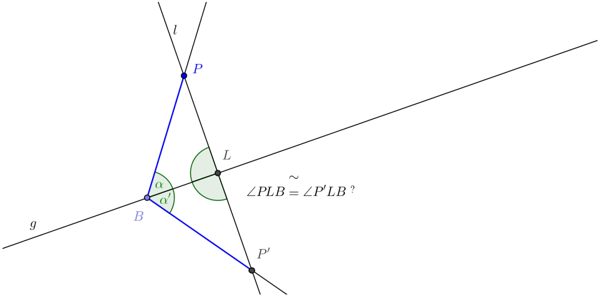
Wir wollen zeigen:

$\angle PLB$ ist ein rechter Winkel



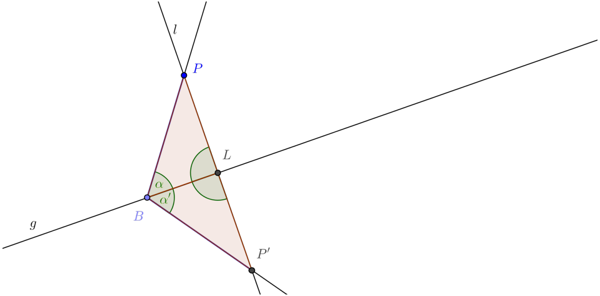
Wir hätten gezeigt, dass $\angle PLB$ ein Rechter ist wenn,

wir gezeigt hätten, dass die beiden Winkel $\angle PLB$ und $\angle P'LB$ zueinander kongruent sind.

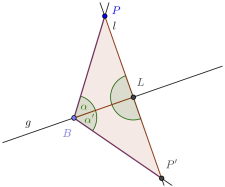


Wenn die beiden Dreiecke $\overline{PLB}$ und $\overline{P'LB}$ kongruent zueinander wären,

müssten auch die beiden Winkel $\angle PLB$ und $\angle P'LB$ zueinander kongruent sein.



$\overline{PLB} \cong \overline{P'LB}$ (und mehr)



Nr.	Beweisschritt	Begründung des Beweisschrittes
(I)	$\overline{BL} \cong \overline{BL}$	
(II)	$\angle PBL \cong \angle P'BL$	
(III)	$\overline{PB} \cong \overline{P'L}$	
(IV)	$\overline{PLB} \cong \overline{P'LB}$	
(V)	$\angle PLB \cong \angle P'LB$	
(VI)	$\lvert\angle PLB\rvert = 90^\circ$	