PH Heidelberg, Fach Mathematik
Modulprüfung 2, Einführung in die Geometrie, Wintersemester 09/10, 12.02.20010
Name Vorname Matrikelnummer

Aufgabe 1 (Multiple Choice)

a) Klaus, Gerda, Max und Steffi führen indirekte Beweise in der absoluten Geometrie. Dabei verwenden sie die nachfolgenden Formulierungen. Kennzeichnen Sie die Aussagen, aus denen eindeutig geschlussfolgert werden kann, dass der jeweils geführte Beweis nicht korrekt ist.

Klaus	„ … Widerspruch dazu, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° beträgt, die Annahme ist zu verwerfen und die Behauptung damit bewiesen.“	x	
Gerda	„ … Widerspruch zur Behauptung, die Annahme ist zu verwerfen wodurch die Behauptung bewiesen ist.“	x	
Max	„ … Widerspruch zum schwachen Außenwinkelsatz, die Annahme ist zu verwerfen, die Behauptung ist damit bewiesen.“		
Steffi	„ … Widerspruch …“		

b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i)	Jedes Viereck ist ein Quadrat, das vollständig in einer Ebene liegt.		
(ii)	Es gibt Vierecke, die Quadrate sind.	x	
(iii)	Jedes Quadrat ist eine Raute und damit auch ein Drachen.	x	
(iv)	Jedes Viereck mit zueinander kongruenten Diagonalen ist ein Parallelogramm.		

c) Welche der folgenden Relationen ziehen Klasseneinteilungen auf den jeweils genannten Mengen nach sich?

(m)	Relation der Winkelkongruenz auf der Menge aller Winkel ein und derselben Ebene	x	
(n)	Relation der Dreieckskongruenz auf der Menge aller Dreiecke des Raumes	x	
(o)	Relation der Parallelität auf der Menge aller Geraden des Raumes	x	
(p)	Relation „Punkt A liegt links von Punkt B“ auf der Menge der Punkte ein und derselben Geraden		

d) Welche der folgenden Punktmengen sind auf jeden Fall konvex?

($*$)	eine offene Halbgerade	x	
($\circ$)	Schnitt einer offenen Halbebene ε mit einer Halbgeraden, die zwei Punkte mit ε gemeinsam hat.	x	
($\therefore$)	Schnitt eines rechten Winkels mit einem spitzen Winkel		
($\because$)	Vereinigungsmenge des Inneren zweier Drachenvierecke, die keine Rauten sind		

e) Es seien A und B zwei verschiedene Punkte. Welche der folgenden Mengen sind Strecken?

(o)	$AB^{+} \cap BA^{+}$	x	
(b)	$AB^{-} \cap BA^{-}$		
(d)	AB geschnitten mit dem Kreis um A durch B		
(a)	$AB \cap BA$		

f) Wir gehen von folgender Implikation aus: Wenn zwei Winkel Nebenwinkel sind, so sind sie supplementär. Kennzeichnen Sie die Kontraposition dieser Implikation.

(w)	Zwei Winkel sind dann und nur dann Nebenwinkel, wenn sie supplementär sind.		
(z)	Nebenwinkel sind immer supplementär.		
(b)	Wenn zwei Winkel supplementär sind, so sind sie Nebenwinkel.		
(ω)	Wenn zwei Winkel nicht supplementär sind, so sind sie auch keine Nebenwinkel.	x	

g) Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zu der Aussage „$\overline{ABCD}$ hat einen Umkreis“?

(s)	Die Innenwinkelsumme von $\overline{ABCD}$ beträgt 360°.		
(a)	Gegenüberliegende Winkel von $\overline{ABCD}$ sind supplementär.	x	
(t)	Ein Trapez, das einen Umkreis hat, ist ein gleichschenkliges Trapez.		
(z)	In der Ebene von $\overline{ABCD}$ existiert ein Punkt M mit $\overline{MA} \cong \overline{MB} \cong \overline{MC}$ und $\lvert MA\rvert = \lvert MD\rvert$	x	

h) Welche der folgenden Definitionen beschreiben den jeweils zu definierenden Begriff wirklich korrekt.

(q)	Unter einem Dreieck $\overline{ABC}$ versteht man die Vereinigungsmenge der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$.		
(w)	Ein n-Eck mit drei Ecken ist ein Dreieck.		
(e)	Ein Dreieck mit einem Umkreis heißt Sehnendreieck.	x	
(r)	Ein Dreieck, das zwei Basiswinkel hat, ist ein gleichseitiges Dreieck.		

Auswertung: mögliche Punktzahl für Aufgabe 1: 8 erreichte Punktzahl:

Aufgabe 2 (ein wenig Definieren und ein wenig Axiomatik)

a) Definieren Sie die Relation „Ein Punkt liegt zwischen zwei anderen Punkten".

Ein Punkt liegt zwischen den beiden Punkten A und B, wenn P sowohl von A als auch von B verschieden ist und die Gleichung $|AP| + |PB| = |AB|$ gilt.

2

b) Definieren Sie den Begriff Dreieck.

Gegeben seien 3 nichtkollineare Punkte. Die Vereinigungsmenge aller drei Strecken, die je zwei dieser drei Punkte als Endpunkte haben, ist ein Dreieck.

2

c) Es seien A, B und C drei Punkte. Beweisen Sie: Aus $\text{Zw}(A, B, C)$ folgt $\text{koll}(A, B, C)$.

Wenn der Punkt B zwischen den Punkten A und C liegt, so ist entsprechend der Definition der Zwischenrelation die folgende Gleichung eine wahre Aussage: $|AB| + |BC| = |AC|$. Aus der Gültigkeit dieser Gleichung folgt unmittelbar nach Axiom A/3 (Axiom zur Dreiecksungleichung) die Kollinearität der Punkte A, B und C.

2

d) Beweisen Sie: Wenn die Summe der Abstände des Punktes A zum Punkt C und der des Punktes B zum Punkt C größer als der Abstand des Punktes B zum Punkt A ist, so sind die Punkte A, B und C die Eckpunkte eines Dreiecks.

Entsprechend der Definition „Dreieck" ist $\text{nkoll}(A, B, C)$ zu zeigen. Axiom A/3 beinhaltet die folgende Implikation:(*) $\text{koll}(A, B, C) \Rightarrow |AB| + |BC| = |AC| \lor |AC| + |CB| = |BA| \lor |BA| + |AC| = |BC|$. Neben (*) gilt die Kontraposition von (*): $(**)$ $\text{nicht}(|AB| + |BC| = |AC| \lor |AC| + |CB| = |BA| \lor |BA| + AC = BC \Rightarrow$ nkoll(A,B,C). Wegen $AC+BC>BA$ ist die Voraussetzung von $(**)$ erfüllt, womit nkoll(A,B,C) folgt.

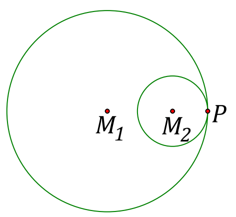
2

e) Es seien k_1 und k_2 Kreise ein und derselben Ebene, deren Radien die Länge R bzw. r haben mögen. Die Mittelpunkte der beiden Kreise mögen M_1 und M_2 sein. Beweisen Sie: Aus $|M_1M_2| = R + r$ folgt, dass k_1 und k_2 genau einen Punkt gemeinsam haben.

Existenz eines gemeinsamen Punktes P:
Nach dem Anordnungsaxiom 1 (Axiom vom Lineal) gibt es auf $M_1M_2^+$ genau einen Punkt P mit $|M_1P| = R$. Aus $|M_1M_2| = R + r$ folgt $|M_2P| = r$. Entsprechend der Definition „Kreis" ist P sowohl ein Punkt von k_1 als auch von k_2.
Eindeutigkeit von P:
Annahme: $\exists Q: Q \neq P \land Q \in k_1 \land Q \in k_2$.
Aus $Q \in k_1$folgt $|M_1Q| = R$. Wegen $Q \neq P$ kann unter Berücksichtigung des Axioms vom Lineal Q nicht auf $M_1M_2^+$ liegen. Q kann auch nicht auf $M_1M_2^-$ liegen, weil in diesem Falle $Zw(Q, M_1, M_2)$ gelten würde, was $|M_2Q| = 2R + r$ zur Folge hätte. Q wäre damit im Widerspruch zur Annahme kein Punkt von k_2.
Damit kann nur noch $\text{nkoll}(M_1, Q, M_2)$ gelten.
Weil Q nach unserer Annahme sowohl zu k_1 als auch zu k_2 gehört gilt: $|M_1Q| = R \land |M_2Q| = r$. Wegen der Voraussetzung $|M_1M_2| = R + r$ gilt damit $|M_1Q| + |QM_2| = |M_1M_2|$. Laut Anordnungsaxiom A/3 muss jetzt $\text{koll}(M_1, Q, M_2)$ gelten, was ein Widerspruch zu $\text{nkoll}(M_1, Q, M_2)$ ist.

6

f) Wir beziehen uns wieder auf die Kreise aus Teilaufgabe e). Die Äquivalenz „ $|M_1M_2| = R + r \Leftrightarrow k_1$ und k_2 haben genau einen Punkt gemeinsam" gilt nicht. Verdeutlichen Sie diesen Umstand durch eine aussagekräftige Skizze.

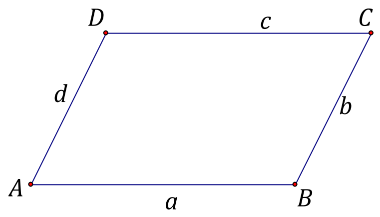


2

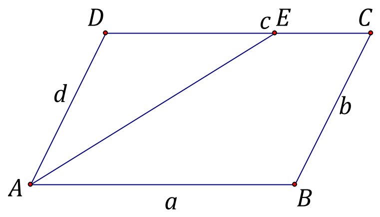
Auswertung: mögliche Punktzahl für Aufgabe 2: 16 erreichte Punktzahl:

Aufgabe 3: (Beweisen, geometrisches Vorstellungsvermögen)

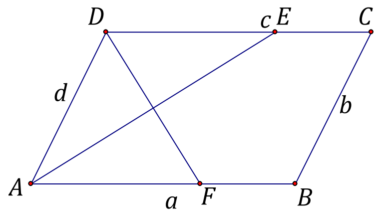
Realschullehrerin Schultze-Kröttendörfer benötigt für ihre nächste Geometriestunde dringend Papierapplikationen, die als Repräsentanten für den Begriff Raute dienen können. In den unendlichen Tiefen ihres Schrankes findet sie jedoch nur Modelle für Parallelogramme, die keine Rauten sind. Zu allem Überfluss muss Frau Schultze-Kröttendörfer dann auch noch feststellen, dass sie die Schachtel mit ihren Konstruktionswerkzeugen in der Schule liegen gelassen hat. Da Frau Schultze-Kröttendörfer eine gediegene Geometrieausbildung an der PH Heidelberg genossen hat, fällt es ihr nicht schwer, aus den vorhandenen Parallelogrammen Rhomben zu falten:



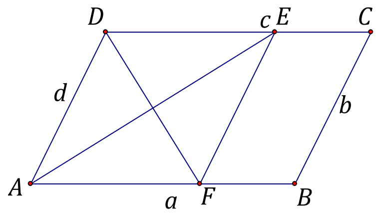
(1) Frau Schultze-Kröttendörfer wählt ein Parallelogramm $\overline{ABCD}$ aus.



(2) Sie faltet das Parallelogramm so, dass die Gerade AB mit der Geraden AD zur Deckung kommt. Sie erhält die Faltgerade AE, wobei E zu DC gehört.



(3) Jetzt faltet sie das Parallelogramm so, dass die Gerade DC mit der Geraden DA zur Deckung kommt. Sie erhält die Faltgerade DF, wobei F zu AB gehört.



(4) Jetzt schneidet Frau Schultze-Kröttendörfer das Parallelogramm längs der Geraden FE ab. Mit $\overline{AFED}$ erhält sie ein Modell einer Raute.

a) Was für geometrische Objekte sind die Halbgeraden AE^+ und DF^+ bezüglich der jeweiligen Innenwinkel des Vierecks $\overline{ABCD}$. (Nur nennen, eine Begründung ist nicht nötig.)

AE^+ und DF^+ sind die Winkelhalbierenden bezüglich $\measuredangle BAD$ bzw. $\measuredangle ADC$. 1

b) Beweisen Sie die Korrektheit der Faltkonstruktion von Frau Schultze-Kröttendörfer, indem Sie zeigen, dass im Viereck $\overline{AFED}$ alle Seiten zueinander kongruent sind. Für den Beweis dürfen Sie keine Sätze nutzen, die nur für Rauten gelten. In der Beweisführung dürfen Sie sich auf die Skizzen dieses Aufgabenblattes beziehen, welche Sie ggf. ergänzen können/sollten. (Auf die Existenz und die Eindeutigkeit der Punkte E und F brauchen Sie nicht einzugehen.)

(1)	$\measuredangle FAE \cong \measuredangle EAD \wedge \measuredangle EDF \cong \measuredangle ADF$	AE^+ ist Winkelhalbierende von $\measuredangle BAD$ DF^+ ist Winkelhalbierende von $\measuredangle ADC$
(2)	$\measuredangle FAE \cong \measuredangle AED \wedge \measuredangle EDF \cong \measuredangle AFD$	Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen
(3)	$\measuredangle EAD \cong \measuredangle AED$	(1), (2), Transitivität der Relation „$\cong$ "
(4)	$\overline{AD} \cong \overline{DE}$	(3), Umkehrung des Basiswinkelsatzes
(5)	$\measuredangle AFD \cong \measuredangle ADF$	(1), (2), Transitivität der Relation „$\cong$ "
(6)	$\overline{AD} \cong \overline{DF}$	(6), Umkehrung des Basiswinkelsatzes
(7)	$\overline{AED} \cong \overline{AEF}$	(6), (1), SWS
(8)	$\overline{AD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FA}$	(4), (8), (9)

8

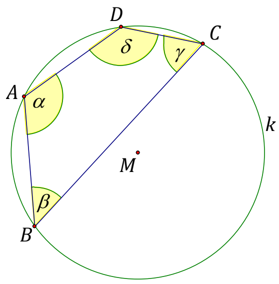
Auswertung: mögliche Punktzahl für Aufgabe 3: 9 erreichte Punktzahl:

PH Heidelberg, Fach Mathematik
Modulprüfung 2, Einführung in die Geometrie, Wintersemester 09/10, 12.02.20010
Name Vorname Matrikelnummer

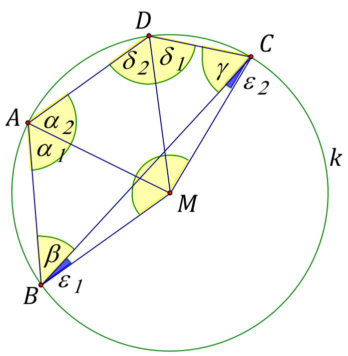
Aufgabe 4: (Beweis ergänzen)

Ergänzen Sie das folgende Beweisfragment:

Es sei $\overline{ABCD}$ ein Sehnenviereck, für das gilt, dass der Mittelpunkt des Umkreises von $\overline{ABCD}$ nicht im Inneren von $\overline{ABCD}$ liegt. Man beweise den Satz über die gegenüberliegenden Winkel von Sehnenvierecken für diesen speziellen Fall.



Voraussetzung: A, B, C, D liegen auf k, $M \notin I(\overline{ABCD})$	2	
Behauptung: $\alpha + \gamma = 180°$ $\beta + \delta = 180°$	2	

Nr.	Skizze	Beweisschritt	Begründung		
(1)		$\alpha_2 \cong \delta_2$	Basiswinkelsatz	1	
(2)		$\measuredangle MBC = \varepsilon_1 \cong \varepsilon_2 = \measuredangle MCB$	Basiswinkelsatz	1	
(3)		$\alpha_1 \cong \beta + \varepsilon_1$	Basiswinkelsatz	1	
(4)		$\delta_1 \cong \gamma + \varepsilon_2$	Basiswinkelsatz	1	
(5)		$\alpha_1 + \beta + \varepsilon_1 + \measuredangle BMC + \varepsilon_2 + \gamma + \delta_1 + \delta_2 + \alpha_2 = 540°$	Winkelsumme im Fünfeck	1	
(6)		$2(\beta + \varepsilon_1) + \measuredangle BMC + \varepsilon_2 + \gamma + \delta_1 + \delta_2 + \alpha_2 = 540°$	(3), (5)	1	
(7)		$2(\beta + \varepsilon_1) + \measuredangle BMC + 2\delta_1 + \delta_2 + \alpha_2 = 540°$	(6), (4)	1	
(8)		$\varepsilon_1 + \measuredangle BMC + \varepsilon_2 = 180°$	Winkelsumme im Dreieck	1	
(9)		$2\varepsilon_1 + \measuredangle BMC = 180°$	(8), (2)	1	
(10)		$2\beta + 180° + 2\delta_1 + 2\delta_2 = 540°$	(9), (7)	1	
(11)		$2\beta + 2\delta_1 + 2\delta_2 = 360°$	(10)	1	
(12)		$\beta + \delta_1 + \delta_2 = 180°$	(11)	1	
(13)		$\beta + \delta = 180°$	Zerlegung von δ	0	
(14)		$\alpha + \gamma = 180°$	Winkelsumme im Viereck und (13)	2	

q.e.d.

Auswertung: mögliche Punktzahl für Aufgabe 4: 18 erreichte Punktzahl:

PH Heidelberg, Fach Mathematik
Modulprüfung 2, Einführung in die Geometrie, Wintersemester 09/10, 12.02.20010
Name Vorname Matrikelnummer

Auswertung:

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	gesamt	Note

Punkte	Note
51	1
50	1
49	1
48	1
47	1,5
46	1,5
45	1,5
44	2
43	2
42	2
41	2
40	2,5
39	2,5
38	2,5
37	2,5
36	3
35	3
34	3
33	3
32	3,5
31	3,5
30	3,5
29	3,5
28	4
27	4
26	4
25	4
24	4,5
23	4,5
22	4,5
21	4,5
20	4,5
19	4,5
18	5
17	5
16	5
15	5
14	5
13	5
12	5
11	5,5
10	5,5
9	5,5
8	5,5
7	5,5
6	5,5
5	6
4	6
3	6
2	6
1	6
0	6

Anhang:

Die Axiome:

Inzidenz:

I/0 Jede Gerade ist eine Punktmenge. Jede Ebene ist eine Punktmenge.

I/1 Zu zwei beliebigen, voneinander verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, welche diese beiden Punkte enthält.

I/2 Jede Gerade enthält mindestens einen Punkt.

I/3 Es existieren (mindestens) drei Punkte, die nicht einer Geraden angehören.

I/4 Zu je drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkten gibt es genau eine Ebene, die diese drei Punkte enthält. Jede Ebene enthält (wenigstens) einen Punkt.

I/5 Wenn zwei Punkte einer Geraden g in einer Ebene ε liegen, so liegt jeder Punkt von g in ε.

I/6 Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, so haben sie noch mindestens einen weiteren Punkt gemeinsam.

I/7 Es gibt vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen.

Abstand

A/1 Zu zwei beliebigen Punkte A und B gibt es eine nichtnegative reelle Zahl d mit $d = 0 \Leftrightarrow A = B$. (Diese Zahl wird als Abstand $|AB|$ der Punkte A und B bezeichnet.)

A/2 Für zwei beliebige Punkte A und B gilt: $|AB| = |BA|$.

A/3 Für drei beliebige Punkte A, B und C gilt:

$$|AB| + |BC| \geq |AC|.$$

Falls koll(A, B, C) so gilt eine der drei Gleichungen:

$$|AB| + |BC| = |AC|$$
$$|AC| + |CB| = |AB|$$
$$|BA| + |AC| = |BC|$$

Ist umgekehrt eine dieser drei Gleichungen erfüllt, so gilt koll(A, B, C).

Anordnung

M/1 Zu jeder nichtnegativen reellen Zahl a und jedem Punkt O existiert auf jedem Strahl mit dem Anfangspunkt O genau ein Punkt A mit $|OA| = a$.

M/2 Es sei g eine Gerade in der Ebene ε. g teilt die Menge der ihr nicht angehörenden Punkte der Ebene ε in zwei nichtleere, disjunkte Mengen derart, dass

a) die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte, die verschiedenen Mengen angehören, die Gerade g schneidet und

b) die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte, die derselben Menge angehören, die Gerade g nicht schneidet.

Kongruenz

SWS Es seien $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ zwei Dreiecke.
Wenn $\overline{AB} \cong \overline{DE} \wedge \overline{AC} \cong \overline{DF} \wedge \measuredangle CAB \cong \measuredangle FDE$ dann $\overline{ABC} \cong \overline{DEF}$.

Euklidisches Parallelenaxiom

EPA Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P außerhalb von g gibt es höchstens eine Gerade die durch P geht und parallel zu g ist.