Kapitel 2

Wichtige Sätze der Schulgeometrie

2.1 Dreieckstransversalen

2.1.1 Auf der Suche nach dem Schwerpunkt

Unter den Dreiecktransversalen versteht man

- die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks,
- die Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks,
- die Geraden, die durch die Höhem des Dreiecks bestimmt sind,
- die Seitenhalbierenden des Dreiecks.

Jedes Dreieck hat also drei Mittelsenkrechte, drei Winkelhalbierende, drei Höhen und drei Geraden, die jeweils durch einen der drei Eckpunkte des Dreiecks und den Mittelpunkt der jeweils gegenüberliegenden Seite des Dreiecks gehen. Alle drei dieser Geraden vom selben Typ treffen sich jeweils in genau einem Punkt. Einer dieser gemeinsamen Schnittpunkte ist der der sogenannte Schwerpunkt. Nimmt man ein reales Modell für ein Dreieck etwa aus Pappe oder Holz, so ist der Schwerpunkt dieses Modells gerade der Punkt, in dem man das Modell etwa auf eine Bleistiftspitze stellen kann und das Modell bleibt im Gleichgewicht. Diese Idee lässt sich bei der Behandlung der Dreieckstransversalen im Geometrieunterricht der SI recht gut zur Motivierung der Unterrichtstoffes einsetzen: Auf der Suche nach dem Schwerpunkt.
Man verrät den Schülern (ich gendere bewusst nicht mehr), dass es einer dieser vier Schnittpunkte sein muss und tastet sich langsam an den Schwerpunkt heran.

2.1.2 Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks

Definition 2.1.1

(Mittelsenkrechten eines Dreiecks)
Unter den Mittelsenkrechten eines Dreiecks versteht man die Mittelsenkrechten der Seiten dieses Dreiecks.

Satz 2.1.1

(Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eines Dreiecks)
Die Mittelsenkrechten eines Dreieck schneiden sich in genau einem Punkt.

Beweis:

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit den schulüblichen Bezeichnungen. m_a, m_b, m_c seien die Mittelsenkrechten dieses Dreiecks. Zunächst beweisen wir, dass sich etwa m_a und m_c in genau einem Punkt schneiden. Hierzu nehmen wir das Gegenteil an.

$$\text{Annahme: } m_a \| m_c$$

<u>Fall 1:</u> m_a und m_c sind nicht identisch und haben damit keinen Punkt gemeinsam.

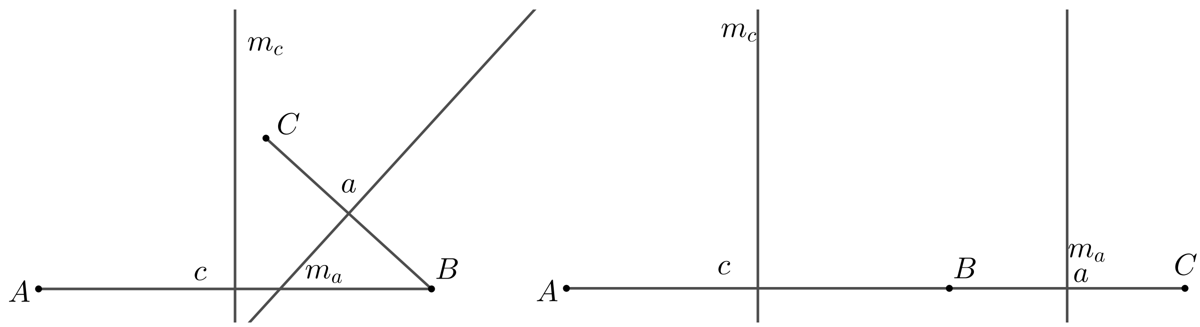

Abbildung 2.1: Können die zwei Mittelsenkrechten m_a und m_c parallel sind?

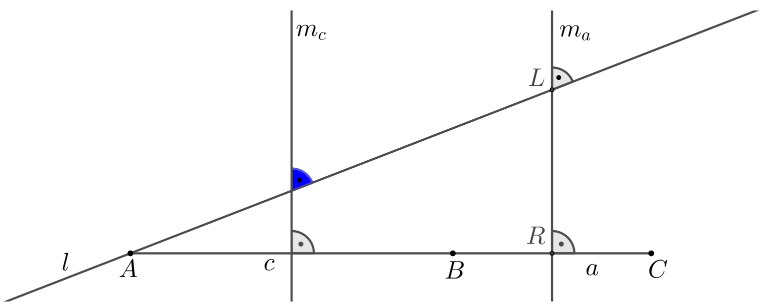

Abbildung 2.2: Die Lote von A auf m_c und auf m_a wären identisch.

Wir zeigen jetzt, dass in diesem Fall die Punkte A, B, C kollinear wären, was im Widerspruch dazu stehen würde, dass A, B, C Eckpunkte eines Dreiecks sind:
Sollten die Punkte A, B, C nicht kollinear sein, dann wäre AB nicht das Lot von A auf m_a.

Dann müsste es eine von BC verschiedene Gerade l geben, die das Lot von A auf m_a ist. l würde dann also senkrecht auf m_a stehen und weil m_a und m_c parallel zueinander sind müsste l nach dem Stufenwinkelsatz auch senkrecht auf m_c stehen. Damit wäre l gleichzeitig das Lot von A auf m_c. Die Lote von A auf m_c und auf m_a sind damit identisch. Die Punkte A, B, C liegen alle auf diesem Lot und sind damit kollinear (s. Abbildung 2.2).

Fall 2: Die Geraden m_a und m_b haben mehr als einen Punkt gemeinsam und sind damit identisch.
In diesem Fall wäre die Gerade m_c die Mittelsenkrechte sowohl der Strecke $c = \overline{AB}$ als auch der Strecke $a = \overline{BC}$. Beide Strecken haben den Punkt B gemeinsam und liegen wegen der Senkrechteneigenschaft der Mittelsenkrechten auf dem Lot von B auf m_c. Wegen der Halbierungseigenschaft der Mittelsenkrechten m_c bezüglich der Strecken a und $c$fallen A und C jetzt zusammen. Damit wäre unser Dreieck zum Zweieck entartet.

Für die folgenden Überlegungen können wir also davon ausgehen, dass sich m_c und m_a in genau einem Punkt S schneiden. Wir zeigen jetzt, dass dieser Punkt S auch ein Punkt der dritten Mittelsenkrechten m_b ist (s. Abbildung 2.3):

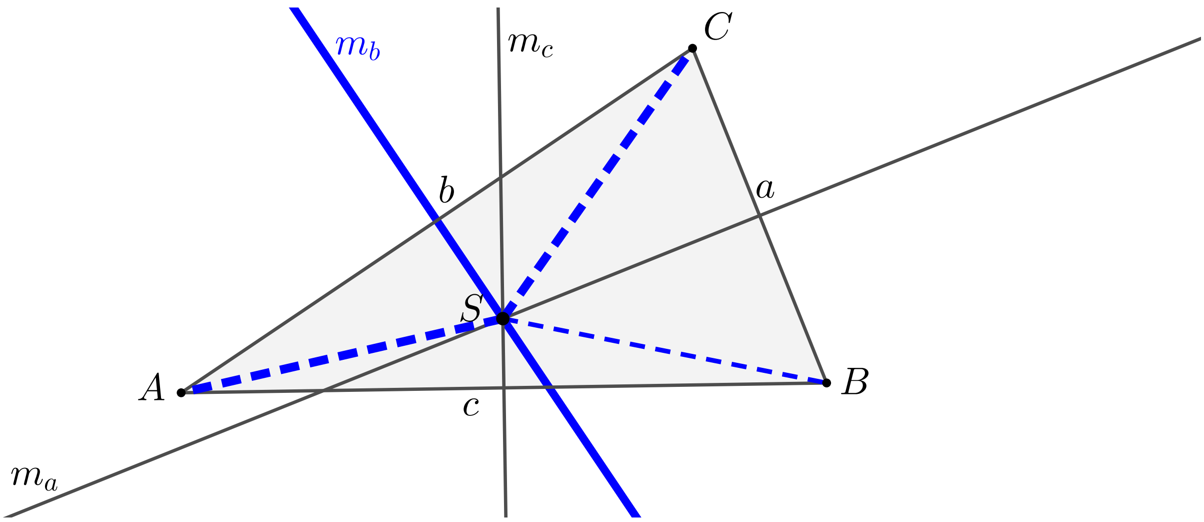

Abbildung 2.3: Auch m_b muss durch S gehen.

(I)	$\overline{AS} \cong \overline{BS}$	Als Punkt der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ hat S zu A und zu B jeweils denselben Abstand. (Mittelsenkrechtenkriterium $\Rightarrow$)
(II)	$\overline{BS} \cong \overline{CS}$	Als Punkt der Mittelsenkrechten von $\overline{BC}$ hat S zu B und zu C jeweils denselben Abstand. (Mittelsenkrechtenkriterium $\Rightarrow$)
(III)	$\overline{AS} \cong \overline{CS}$	(I), (II), Transitivität der Relation $\cong$
(IV)	$S \in m_b$	Weil S nach (III) zu A und C jeweils denselben Abstand hat, ist S ein Punkt der Mittelsenkrechten von $\overline{AC}$. (Mittelsenkrechtenkriterium $\Leftarrow$)

Weil der gemeinsame Schnittpunkt S der drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks zu den Eckpunkten des Dreiecks jeweils ein und denselben Abstand hat, ist er gleichzeitig der Mittelpunkt eines Kreises, der durch alle drei Eckpunkte des Dreiecks geht. Dieser Kreis wird Umkreis des Dreiecks genannt.
(s. Abbildung 2.4)

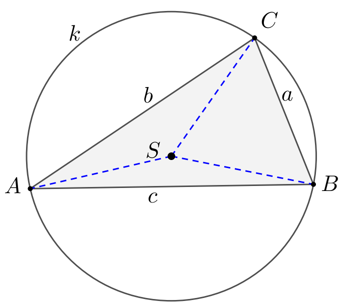

Abbildung 2.4: Umkreis

Definition 2.1.2

(Umkreis ein Dreiecks)
Wenn ein Kreis durch alle drei Eckpunkte eines Dreiecks geht, so ist er ein Umkreis dieses Dreiecks.

Satz 2.1.2

Existenz und Eindeutigkeit des Umkreises eines Dreiecks
Jedes Dreieck hat genau einen Umkreis.

<u>Beweis:</u>

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck. Wir haben bereits bewiesen, dass sich die Mittelsenkrechten von $\overline{ABC}$ in genau einem Punkt S schneiden. Nach dem Mittelsenkrechtenkriterium hat dieser Punkt zu den Eckpunkten des Dreiecks jeweils ein und denselben Abstand und ist somit Mittelpunkt eines Umkreises von $\overline{ABC}$. Es bleibt zu zeigen , dass es keinen weiteren von S verschiedenen Punkt M gibt, der ebenfalls Mittelpunkt eines Kreises ist, der durch alle drei Eckpunkte der Dreiecks $\overline{ABC}$ geht. Nehmen wir an, dass M existiert. Als Mittelpunkt eines Umkreises von $\overline{ABC}$ würde für M gelten:

(1) $\overline{MA} \cong \overline{MB}$

(2) $\overline{MA} \cong \overline{MC}$

(3) $\overline{MB} \cong \overline{MC}$

Wegen (1) wäre M ein Punkt von M_c. Wegen (2) wäre M ein Punkt von m_b. Wegen (3) wäre M ein Punkt von m_a. Der Punkt M würde also zu allen drei Mittelsenkrechten des Dreiecks $\overline{ABC}$ gehören. Weil nur einen einzigen solchen Punkt geben kann, müssen S und M identisch sein, was im Widerspruch zu unserer Annahme $M \not\equiv S$ steht.
Aus Satz 2.1.2 folgt sofort das folgende Korollar:

Satz 2.1.3

Korollar aus Satz 2.1.2
Durch drei nicht kollineare Punkte ist ein Kreis eindeutig bestimmt.

2.1.3 Die Höhen eines Dreiecks

Definition 2.1.3

Höhen eines Dreiecks
Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck.

- *Die Höhe h_c von $\overline{ABC}$ ist das Lot von C auf die Gerade AB.*
- *Die Höhe h_a von $\overline{ABC}$ ist das Lot von A auf die Gerade BC.*
- *Die Höhe h_b von $\overline{ABC}$ ist das Lot von B auf die Gerade AC.*

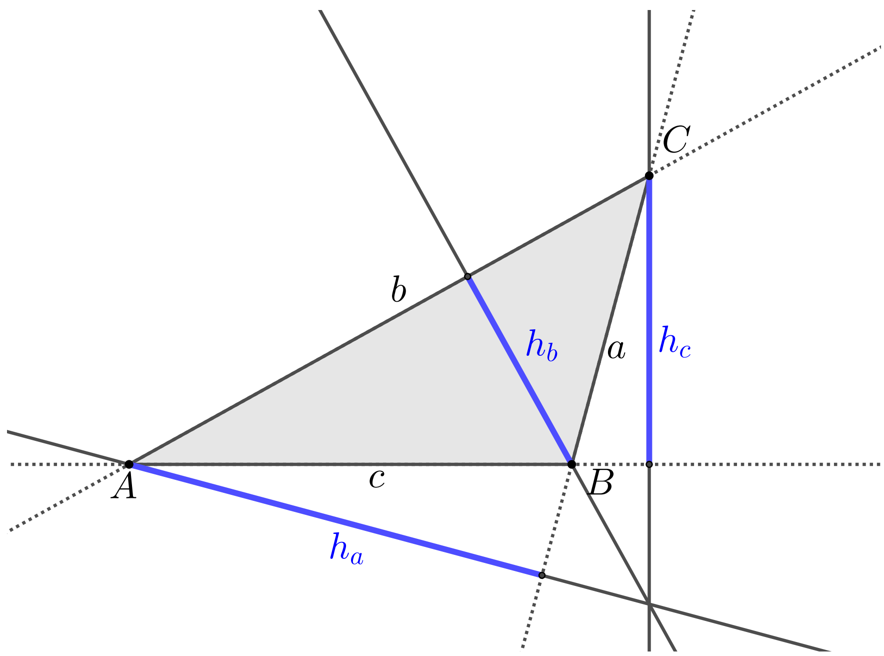

Abbildung 2.5: Höhen eines Dreiecks

Satz 2.1.4

Höhenschnittpunkt
Die Geraden, die durch die Höhen eines Dreiecks eindeutig bestimmt sind, schneiden sich in genau einem Punkt.

Beweis:

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit den Höhen h_a, h_b, h_c. Die Geraden, die durch diese Höhen eindeutig bestimmt sind, mögen mit H_a, H_b, H_c bezeichnet sein. Wir führen den Beweis auf Satz 2.1.1 zurück. Durch diesen Satz wissen wir bereits, dass sich die Mittelsenkrechten eines Dreiecks in genau einem Punkt schneiden. Die Beweisidee besteht jetzt darin, dass wir ein Dreieck $\overline{A_1B_1C_1}$ konstruieren, für das die Geraden H_a, H_b, H_c die Mittelsenkrechten sind. Konstruktionsvorschrift für $\overline{A_1B_1C_1}$:

a) Konstruiere a_1, die Parallele durch A zu BC.

b) Konstruiere b_1, die Parallele durch B zu AC.

c) Konstruiere c_1, die Parallele durch C zu AB.

Die Korrektheit aller drei Konstruktionsschritte ist durch den Satz von der Existenz der Parallelen gesichert. Weil die Seiten des Dreiecks $\overline{ABC}$ paarweise nicht parallel zueinander sind, können auch die als Parallelen zu den Seiten von $\overline{ABC}$ konstruierten Geraden c_1, a_1, b_1 nicht paarweise parallel zueinander sein. Demzufolge existieren die folgenden Schnittpunkte A_1, B_1, C_1 (s. Abbildung 2.6):

$$c_1 \cap b_1 = \{A_1\}$$
$$c_1 \cap a_1 = \{B_1\}$$
$$a_1 \cap b_1 = \{C_1\}$$

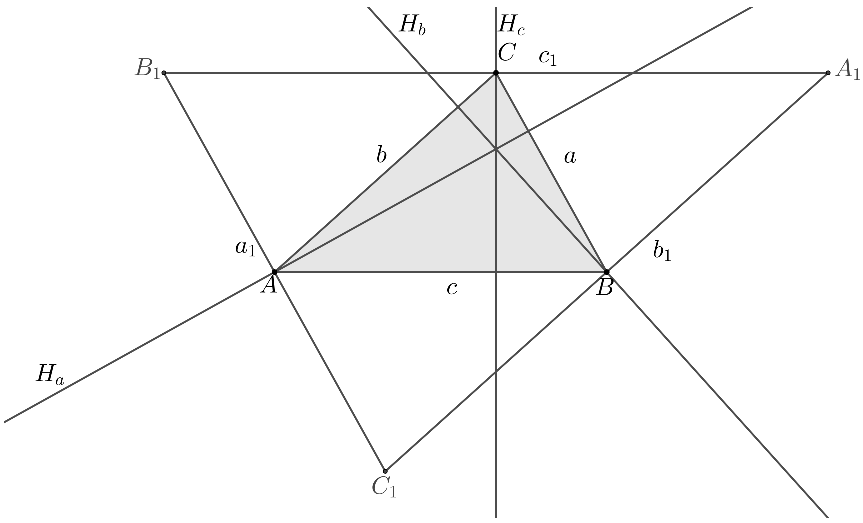

Abbildung 2.6: Konstruktion von $\overline{A_1B_1C_1}$

Für die Höhen h_c, h_a, h_b des Dreiecks $\overline{ABC}$ gilt nach Definition 2.1.3:

$$h_c \perp AB, h_a \perp BC, h_b \perp AC$$

und damit gilt auch für die Geraden H_a, H_b, H_c:

$$H_c \perp AB, H_a \perp BC, H_b \perp AC$$

Weil a_1, b_1, c_1 jeweils parallel zu a, b, c generiert wurden gilt nach dem Stufenwinkelsatz jetzt auch:

$$H_c \perp A_1B_1, H_a \perp B_1C_1, H_b \perp A_1C_1$$

Wenn wir jetzt noch zeigen könnten, dass A, B, C die Mittelpunkte jeweils der Strecken $\overline{B_1C_1}, \overline{A_1C_1}, \overline{A_1B_1}$ sind, hätten wir gezeigt, dass H_a, H_b, H_c die Mittelsenkrechten des Dreiecks $\overline{A_1B_1C_1}$ sind und sich somit in genau einem Punkt treffen müssen. Diese Mittelpunktseigenschaft der Eckpunkte von unseres Ausgangsdreiecks $\overline{ABC}$ ergibt sich aus der Kongruenz der neu entstandenen Teildreiecke zum Ausgangsdreieck $\overline{ABC}$:
$\overline{ABC}$ ist zu den folgenden Dreiecken kongruent (Abbildung 2.6):

$$\overline{A_1BC}, \overline{ABC_1}, \overline{AB_1C}$$

womit insgesamt gelten würde:

$$\overline{ABC} \cong \overline{A_1BC} \cong \overline{ABC_1} \cong \overline{AB_1C}$$

Wir zeigen exemplarisch $\overline{ABC} \cong \overline{A_1BC}$:

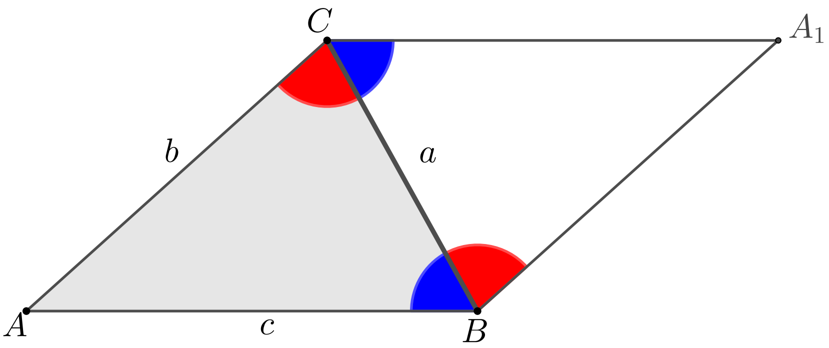

Abbildung 2.7: Kongruenz der entstehenden Teildreiecke

Der folgende Beweis bezieht sich auf Abbildung 2.7:

(I)	$\overline{BC} \cong \overline{BC}$	trivial
(II)	$\angle ACB \cong \angle A_1BC$	Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen
(III)	$\angle ABC \cong \angle A_1CB$	Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen
(IV)	$\overline{ABC} \cong A_1CB$	(I), (II), (III), WSW

Alle weiteren Dreieckskongruenzen lassen sich analog nachweisen. Satz 2.1.4 ist damit bewiesen.

2.1.4 Kreistangenten

Warum jetzt Kreistangenten?

Aus der Schule ist bekannt, dass jedes Dreieck einen Inkreis hat. Bezüglich dieses Inkreises liegen die Seiten des Dreiecks auf Tangenten an den Inkreis. Den Mittelpunkt des Inkreises erhält man durch den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks. Hinsichtlich des Radius des Inkreises bedarf es gewisser Eigenschaften von Kreistangenten, die wir vorab untersuchen werden.

Definition der Kreistangenten

Definition 2.1.4

Kreistangente
Es sei k ein Kreis. Die Gerade t heißt Tangente an k im Berührungspunkt B, wenn sie

a) mit k in ein und derselben Ebene liegt und

b) mit k den Punkt B und nur den Punkt B gemeinsam hat.

Das Tangentenkriterium

Der Einfachheit halber setzen wir im Folgenden ebene Geometrie voraus.

Satz 2.1.5

Tangentenkriterium
Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Die Gerade t ist genau dann eine Tangente an k im Punkt B, wenn sie senkrecht auf MB steht.

Beweis:

Wir beweisen zunächst die „Hinrichtung“ (Abbildung 2.8).
Es sei t eine Gerade, die mit dem Kreis k den Punkt B und nur den Punkt B gemeinsam hat. Der Mittelpunkt von k sei mit M bezeichnet. Wir haben zu zeigen, dass t senkrecht auf MB steht. Hierzu nehmen wir an, dass t nicht senkrecht auf MB steht. Dann ist $\overline{MB}$ nicht das Lot von M auf t. nach dem Sartz von der Existenz des Lotes muss jetzt auf t ein Punkt $L \not\equiv B$ existieren, der der Fußpunkt des Lotes von M auf t ist. $\overline{ML}$ ist dann das Lot von M auf t und steht also senkrecht auf t. Nach dem Axiom vom Lineal gibt es auf dem Strahl LB^- genau einen Punkt B' mit $BL| = |B'L|$. Die beiden Dreiecke $\overline{MLB}$ und $\overline{MLB'}$ sind jetzt nach SWS kongruent. Demzufolge hat der Punkt B' zu M denselben Abstand wie der Punkt B', weshalb er auf dem Kreis k liegen würde. B' wurde aber auch auf t generiert, weshalb B' ein weiterer gemeinsamer Punkt von t mit k wäre. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $t \cap k = \{B\}$ gilt.

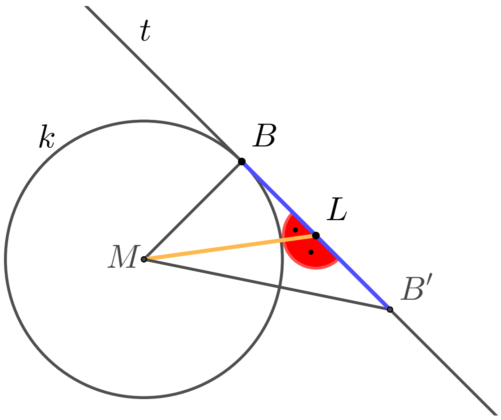

Abbildung 2.8: $\overline{MB}$ und $\overline{MB'}$ wären jetzt Radien

Jetzt beweisen wir die „Rückrichtung“ (Abbildung 2.9):
Es seien k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und B ein Punkt dieses Kreises. Die Gerade t sei die Senkrechte in B auf MB. Wir nehmen an, dass sie mit k einen zweiten Punkt A gemeinsam hat. Weil $\overline{MB}$ und $\overline{MA}$ jetzt Radien von k sind, wäre das Dreieck $\overline{MBA}$ gleichschenklig. Nach dem Basiswinkelsatz wären unter Berücksichtigung der Voraussetzung $t \perp MB$ beide Basiswinkel rechte Winkel. Das ist allerdings nicht möglich.

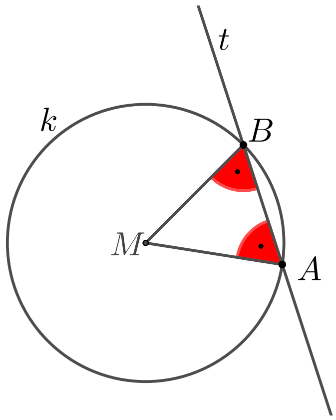

Abbildung 2.9: $\overline{MBA}$ wäre gleichschenklig mit rechten Basiswinkeln

2.1.5 Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks

Definition 2.1.5

(Winkelhalbierende eines Dreiecks)
Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks sind die Winkelhalbierenden der Innenwinkel dieses Dreiecks.

Satz 2.1.6

(Schnittpunkt der Winkelhalbierenden eines Dreiecks)
Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in genau einem Punkt.

Beweis:

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck. w_α sei die Winkelhalbierende des Winkels $\alpha = \angle CAB$, w_β sei die Winkelhalbierende des Winkels $\beta = \angle CBA$ und w_γ sei die Winkelhalbierende des Winkels $\gamma = \angle ACB$.
Zunächst müssen sich die beiden Winkelhalbierenden w_α und w_β in genau einem Punkt S scheiden:

- w_α und w_β können nicht identisch sein, weil ihre Anfangspunkte A und B bereits verschieden sind.
- Wären w_α und w_β schnittpunktfrei parallel, so wäre die Summe $\frac{|\alpha|}{2} + \frac{|\beta|}{2}$ nach dem Satz über entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen 180°.

Sei also S der Schnittpunkt von w_α mit w_β (Abbildung 2.10)

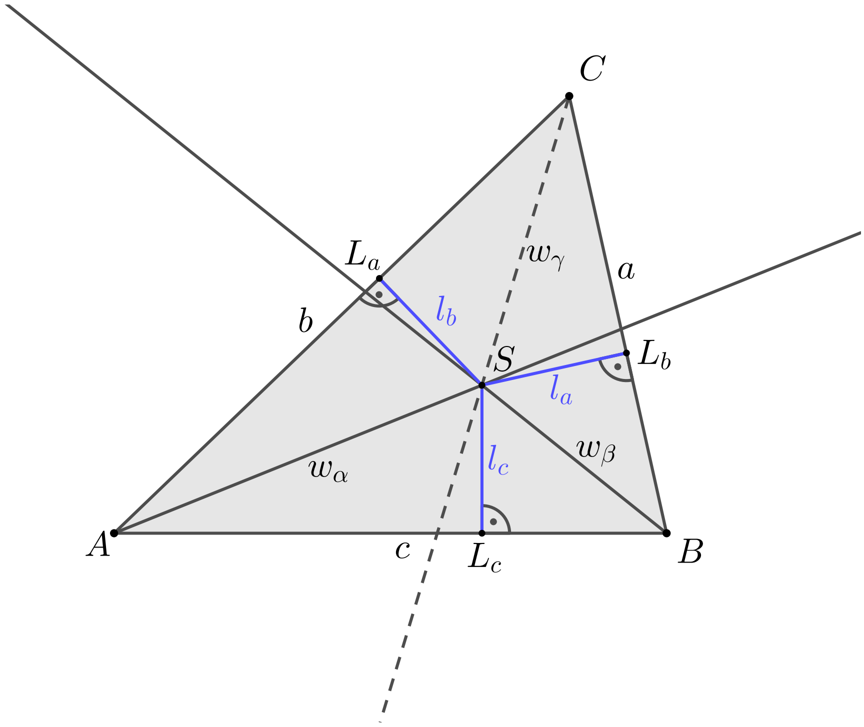

Abbildung 2.10: Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

(I)	$l_c \cong l_b$	Als Punkt der Winkelhalbierenden von α hat S zu b und zu c jeweils denselben Abstand. (Winkelhalbierendenkriterium $\Rightarrow$)
(II)	$l_c \cong l_a$	Als Punkt der Winkelhalbierenden von β hat S zu a und zu c jeweils denselben Abstand. (Winkelhalbierendenkriterium $\Rightarrow$)
(III)	$l_b \cong l_a$	(I), (II), Transitivität der Relation $\cong$
(IV)	$S \in w_\gamma$	Weil S nach (III) zu a und b jeweils denselben Abstand hat, ist S ein Punkt der Winkelhalbierenden von γ. (Winkelhalbierendenkriterium$\Leftarrow$)

Inkreis eines Dreiecks

Definition 2.1.6

(Inkreis eines Dreiecks)
Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck. Wenn die Geraden AB, AC und BC Tangenten ein und desselben Kreises k sind, dann ist k ein Inkreis von $\overline{ABC}$.

Satz 2.1.7

(Dreiecksinkreis)
Jedes Dreieck hat genau einen Inkreis.

Beweis:
Weil der Abstand des Schnittpunktes S der Winkelhalbierenden zu den Seiten des Dreiecks jeweils gleich ist, gibt es einen Kreis k mit dem Mittelpunkt S der durch die drei Lotfußpunkte der Lote von S auf die jeweilige Dreiecksseite geht. Weil diese Lote senkrecht auf den Geraden AB, BC und AC stehen, sind diese Geraden nach Satz 2.1.5 Tangenten an k. Der Beweis der Eindeutigkeit des Inkreises erfolgt analog zum Beweis der Eindeutigkeit des Umkreises.

2.1.6 Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks

Definition 2.1.7

(Seitenhalbierende eines Dreiecks)
Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck. M_a sei der Mittelpunkt von $\overline{BC}$, M_b sei der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ und M_c sei der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ Die folgenden Geraden heißen Seitenhalbierende des Dreiecks $\overline{ABC}$:

- CM_c
- BM_b
- AM_a

Satz 2.1.8

(Schnittpunkt der Seitenhalbierenden)
Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in genau einem Punkt.

Beweis:

Ein Beweis dieses Satzes bleibt dem Masterstudiengang vorbehalten. Wer es dennoch versuchen mag: Die Strahlensätze sind hilfreich.

Physik

Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist der sogenannte Schwerpunkt des Dreiecks. Die Seitenhalbierenden selbst heißen Schwerelinien. Experimentieren Sie:

Schneiden Sie ein Dreieck aus Pappe aus und zeichnen sie seine Schwerelinien ein. Legen Sie einen Bleistift auf den Tisch und legen sie das Pappdreieck so auf den Bleistift, dass dieser jeweils mit einer Schwerelinie zur Deckung kommt. Stellen Sie den Bleistift dann auf und legen Sie das Dreieck dann so auf den die stumpfe Seite des Bleistifts, dass diese mit dem Schnittpunkt der Schwerelinien zur Deckung kommt.

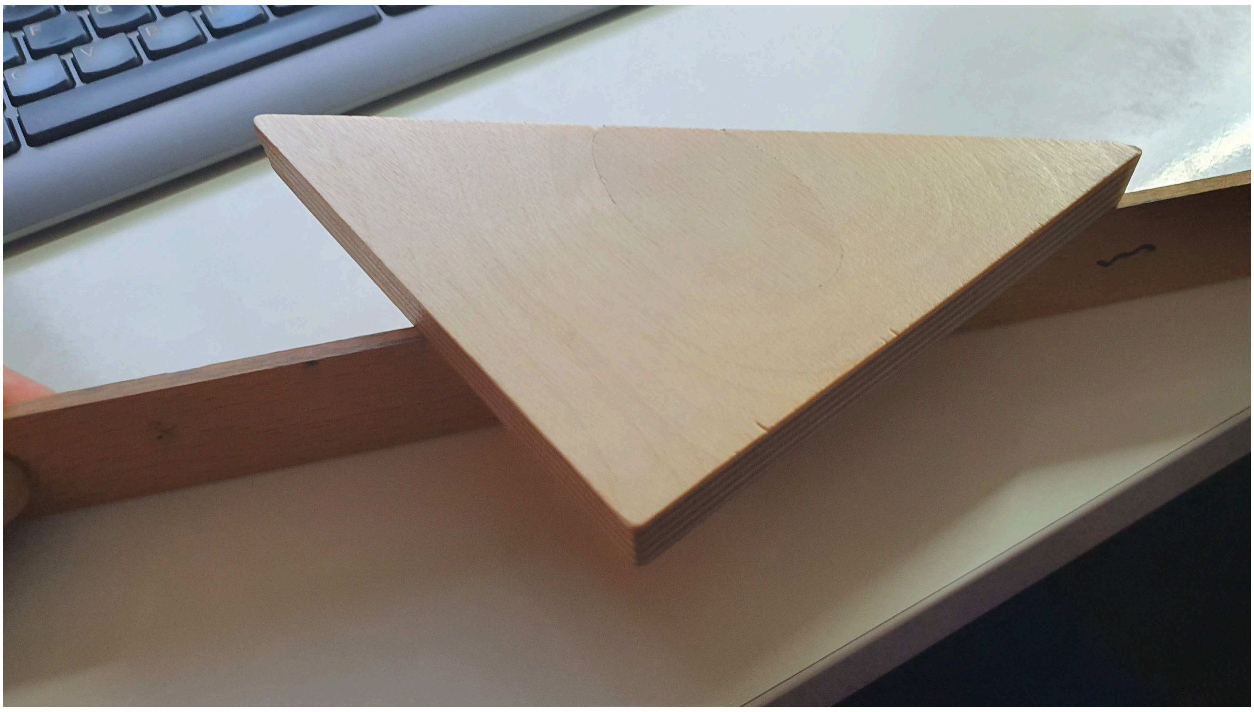

Abbildung 2.11: Dreieck auf einer Schwerelinie