Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 9

(Lösungen)

1. Definieren Sie, was man unter einem Kreis *k* mit dem Mittelpunkt *M* versteht. (Bezüglich der Definition wollen wir davon ausgehen, dass wir Geometrie im Raum betreiben.)

Es sei *M* ein Punkt der Ebene *E*. Ein Kreis *k*, ist die Menge aller Punkte *P* der Ebene *E*, die vom Punkt *M* den selben Abstand haben. Der Punkt *M* heißt Mittelpunkt des Kreises *k*.

2. Kreissehnen, Kreisradien und Kreisdurchmesser sind Strecken. Definieren Sie was man unter einer Sehne, einem Radius und einem Durchmesser eines Kreises versteht.

Eine Strecke $\overline{AB}$ ist dann eine Kreissehne eines Kreises *k*, wenn *A* und *B* zu *k* gehören.

Eine Strecke $\overline{MB}$ ist dann ein Kreisradius eines Kreises *k*, wenn *B* zu *k* gehört.

Eine Strecke $\overline{AB}$ ist dann ein Kreisdurchmesser eines Kreises *k*, wenn *A* und *B* zu *k* gehören und $\overline{AB}$ durch den Mittelpunkt *M* geht.

3. Der folgende Satz bezieht sich auf die ebene Geometrie.
   Satz:

   Es seien k_1 und k_2 zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 bzw. M_2 und den Radien r_1 bzw. r_2. Beweisen Sie: Aus $|M_1M_2| = |r_1| + |r_2|$ folgt, dass k_1 und k_2 genau einen Punkt gemeinsam haben.

Existenz eines gemeinsamen Punktes P:
Nach dem Anordnungsaxiom 1 (Axiom vom Lineal) gibt es auf $M_1M_2^+$ genau einen Punkt P mit $|M_1P| = R$. Aus $|M_1M_2| = R + r$ folgt $|M_2P| = r$. Entsprechend der Definition „Kreis“ ist P sowohl ein Punkt von k_1 als auch von k_2.
Eindeutigkeit von P:
Annahme: $\exists Q: Q \neq P \wedge Q \in k_1 \wedge Q \in k_2$.
Aus $Q \in k_1$ folgt $|M_1Q| = R$. Wegen $Q \neq P$ kann unter Berücksichtigung des Axioms vom Lineal Q nicht auf $M_1M_2^+$ liegen. Q kann auch nicht auf $M_1M_2^-$ liegen, weil in diesem Falle $Zw(Q, M_1, M_2)$ gelten würde, was $|M_2Q| = 2R + r$ zur Folge hätte. Q wäre damit im Widerspruch zur Annahme kein Punkt von k_2.
Damit kann nur noch nkoll(M_1, Q, M_2) gelten.
Weil Q nach unserer Annahme sowohl zu k_1 als auch zu k_2 gehört gilt: $|M_1Q| = R \wedge |M_2Q| = r$. Wegen der Voraussetzung $|M_1M_2| = R + r$ gilt damit $|M_1Q| + |QM_2| = |M_1M_2|$. Laut Anordnungsaxiom A/3 muss jetzt koll(M_1, Q, M_2) gelten, was ein Widerspruch zu nkoll(M_1, Q, M_2) ist.

4. Warum gilt die Umkehrung des Satzes aus Aufgabe 3 nicht? Verdeutlichen Sie mit einer Skizze.