Übungen Woche 1: 14.10.-21.10.

I Mengenlehre

Aufgabe 1:

Es sei A die Menge der geraden natürlichen Zahlen, B die Menge der natürlichen Zahlen, deren Quadrate gerade ist. Vergleichen Sie die Mengen.

Menge A:
- gerade natürliche Zahlen
- 2, 4, 6, 8, 10, 12

Menge B:
- Wenn eine Zahl gerade ist, ist ihr Quadrat ebenfalls gerade
  Bsp.: $2^2=4$, $4^2=16$
- wenn eine Zahl ungerade ist, ist ihr Quadrat ungerade

Die beiden Mengen A und B sind gleich: $A=B$

Aufgabe 2:

Geben Sie eine andere Schreibweise der folgenden Mengen an und prüfen Sie, welche Mengen identisch sind.

$M_1 = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x + 2 = 0\}$

$M_2 = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 2 = 0\}$

$M_3 = \{x | x \in \mathbb{Z} \wedge x + 2 = 0\}$

$M_4 = \{x | x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 - 2 = 0\}$

$M_5 = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 2 = 0\}$

$M_6 = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge (x + 2)^2 = 0\}$

M_1: die natürlichen Zahlen x, die die Gleichung $x+2=0$ lösen
-2 ist keine natürliche Zahl deswegen ist die Menge leer $M_1 = \emptyset$

M_2: reele Zahlen, die die Gleichung $x^2+2=0$

$x^2 = -2$

da $x^2 > 0$ für alle $x \subset \mathbb{R}$ gibt es keine reelen Lösungen, die Menge ist leer $M_2 = \emptyset$

M_3
- die Gleichung hat die Lösung $x=-2$
- da $x=-2 \subset \mathbb{Z}$ besteht die Menge aus der einzigen Zahl $M_3 = \{-2\}$

M_4
- Lösung der Gleichung $x = \pm\sqrt{2}$
- $\sqrt{2}$ keine irrationale Lösung und nicht in den rationalen Lösungen $M_4 = \emptyset$

M_5
- Lösung der Gleichung $x = \pm\sqrt{2}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
- $M_5 = \{2, -\sqrt{2}\}$

M_6

• Lösung der Gleichung $x = -2$

• $-2 \in R$ $\quad M_6 = \{-2\}$

Zusammenfassung der Mengen

• $M_1 = \emptyset$
• $M_2 = \emptyset$
• $M_3 = \{-2\}$
• $M_4 = \emptyset$
• $M_5 = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
• $M_6 = \{-2\}$

identische Mengen:

$M_1 = M_2 = M_4$

$M_3 = M_6$

M_5

Aufgabe 3:

Aufgabe 1.3

Prüfen Sie, welche der folgenden Mengen identisch sind und welche Teilmengenbeziehungen bestehen. Stellen Sie die Teilmengenbeziehungen in einem Venn.Diagramm dar.

M_1 : Menge aller gleichschenkligen Dreiecke mind 2 seiten gleich lang

M_2 : Menge aller gleichseitigen Dreiecke alle seiten gleich lang

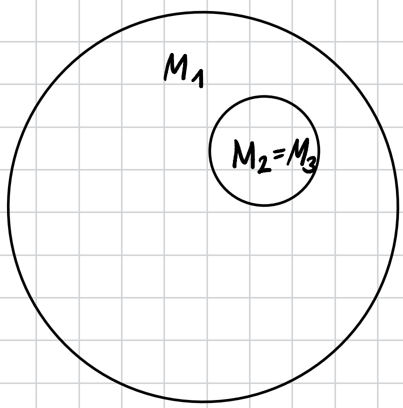
M_3 : Menge aller gleichwinkligen Dreiecke alle Winkel gleich groß

ein gleichseitiges Dreieck ist immer gleichwinklig $\Rightarrow M_2 = M_3$

$M_2 \subset M_1$ nicht jedes gleichschenklige Dreieck ist gleichseitig

$M_3 \subset M_1$

Venn - Diagramm:



Aufgabe 4

Prüfen Sie, welche der folgenden Mengen identisch sind und welche Teilmengenbeziehungen bestehen.

S_1 : Menge aller Vierecke mit vier kongruenten Winkeln
alle Vierecke, deren Winkel gleich sind, nur Rechteck und Quadrat

S_2 : Menge aller Vierecke mit gleich langen, einander halbierenden Diagonalen
Vierecke, bei denen die Diagonalen gleich lang sind und sich gegenseitig halbieren, Rechtecke und Quadrate

S_3 : Menge aller Vierecke mit zwei Paaren paralleler Gegenseiten und einem rechten Winkel Rechtecke und Quadrate

Analyse:

1. Vergleich: S_1 und S_2
   - S_1 sind alle Rechtecke, da alle Winkel gleich groß sind (90°). Quadrate gehören ebenfalls dazu, da sie spezielle Rechtecke sind
   - S_2 sind ebenfalls Rechtecke und Quadrate, da diese die Eigenschaft der gleich langen, sich halbierenden Diagonalen besitzen.

   Ergebnis: $S_1 = S_2$

2. Vergleich: S_1 und S_3
   - S_1 sind Rechtecke und Quadrate
   - S_3 beschreibt ebenfalls Rechtecke und Quadrate, da es Vierecke mit parallelen Gegenseiten und einem rechten Winkel sind

   Ergebnis: $S_1 = S_3$

3. Vergleich: S_2 und S_3
   Da S_2 und S_1 identisch sind und S_3 auch gleich S_1 ist, gilt auch $S_2 = S_3$.

Fazit: Alle Mengen S_1, S_2 und S_3 sind identisch. Sie beschreiben jeweils die Menge aller Rechtecke, zu der auch das Quadrat als spezieller Fall gehört. Es bestehen also keine echten Teilmengenbeziehungen zwischen diesen Mengen, da sie alle gleich sind.

2. Aussagenlogik

Beweisen Sie jeweils mit einer Wahrheitstabelle:

- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

a	b	¬a	a ⇒ b	¬a ∨ b
w	w	f	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

$\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$ ϟ

a	b	¬a	a ∧ b	¬(a ∧ b)	(¬a ∨ b)
w	w	f	w	f	w
w	f	f	f	w	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	f	w	w