3 Der Gruppe der Pfeilklassen

Vorbemerkung: Die Ausführungen gelten sowohl für die Ebene, als auch für den Raum.

3.1 Pfeile und Pfeilklassen

Definition 3.1

gerichtete Strecke bzw. Pfeil
Eine Strecke $\overline{AB}$, deren Endpunkte A und B zu einem geordneten Paar (A, B) zusammengefasst werden, heißt gerichtete Strecke bzw. Pfeil. Als gerichtete Strecke wird $\overline{AB}$ als $\overrightarrow{AB}$ geschrieben. A heißt Anfangspunkt und B Endpunkt von $\overrightarrow{AB}$.

Definition 3.2

Parallelgleichheit von Pfeilen
Der Pfeil $\overrightarrow{CD}$ heißt parallelgleich zu dem Pfeil $\overrightarrow{AB}$, wenn $\overline{ACDB}$ ein Paralellogramm ist. Sollte $\text{koll}(A, B, C, D)$ gelten, dann ist $\overrightarrow{CD}$ parallelgleich zu $\overrightarrow{AB}$, wenn ein zu $\overrightarrow{AB}$ parallelgleicher Pfeil $\overrightarrow{EF}$ mit $\text{nkoll}(A; B, E, F)$ existiert, zu dem $\overrightarrow{CD}$ parallelgleich ist.
In Zeichen $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Satz 3.1

Parellelgleich ist eine ÄR
Die Relation parallelgleich ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Pfeile.

Aufgabe 3.1

Beweisen Sie Satz 3.1.

Definition 3.3

Pfeilklasse
Eine Pfeilklasse ist eine Äquivalenzklasse nach der Relation pfeilgleich auf der Menge aller Pfeile.

Da jede Pfeilklasse durch jeden ihrer Repäsentanten eindeutig bestimmt ist, kennzeichnet die Schreibweise $\overrightarrow{AB}$ zum einen den Pfeil $\overrightarrow{AB}$ und zum anderen die Pfeilklasse, in der $\overrightarrow{AB}$ liegt. Es wird jeweils aus dem Kontext hervorgehen, ob die gesamte Klasse oder nur der spezielle Pfeil gemeint ist. Sie kennen ein derartiges Vorgehen von den Brüchen: $\frac{3}{4}$ meint zum einen den konkreten Bruch $\frac{3}{4}$ und zum anderen die gebrochene Zahl $\frac{3}{4}$, also alle Brüche die durch Kürzen oder Erweitern aus $\frac{3}{4}$ hervorgehen.

Definition 3.4

Pfeilklassenaddition
Es seien $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ zwei Pfeilklassen. Es gelte $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{BC} \in \overrightarrow{b}$. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} := \overrightarrow{c}$ mit $\overrightarrow{AC} \in \overrightarrow{c}$.

Aufgabe 3.2

Repräsentantenunabhängigkeit der Pfeilklassenaddition
Beweisen Sie die Wohldefinierheit der Pfeilklassenadddition.

Satz 3.2

Gruppe der Pfeilklassen Es sei $\mathbb{V}$ *die Menge aller Pfeilklassen und* $+$ *die Pfeilklassenaddition. Die Struktur* $[\mathbb{V}, +]$ *ist eine abelsche Gruppe.*

Aufgabe 3.3

Beweisen Sie Satz 3.2.