

# 1 Begriff der Bewegung

## 1.1 Zwei grundlegende Ideen Kongruenz von Figuren zu betrachten

### 1.1.1 Dreieckskongruenz

Zwei Dreiecke  $\overline{ABC}$  und  $\overline{DEF}$  gelten als kongruent zueinander, wenn sie „in allen Stücken übereinstimmen“.

#### **Definition 1.1**

*Dreieckskongruenz im Sinne Euklids*

$$\overline{ABC} \cong \overline{DEF} :\Leftrightarrow$$

$$(I) \overline{AB} \cong \overline{DE},$$

$$(II) \overline{BC} \cong \overline{EF},$$

$$(III) \overline{AC} \cong \overline{DF},$$

$$(IV) \angle CAB \cong \angle FDE,$$

$$(V) \angle ABC \cong \angle DEF,$$

$$(VI) \angle ACB \cong \angle DFE$$

*gilt.*

Bekannterweise reichen zur Überprüfung der Dreieckskongruenz drei geeignete „Stücke“ aus:

SSS Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen drei Seiten übereinstimmen.

SWS Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

WSW Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Winkeln und der eingeschlossenen Seite übereinstimmen.

SsW Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und einem Winkel übereinstimmen, wobei der Winkel der längeren der beiden Seiten gegenüberliegen muss.

Die eigentliche Idee der Kongruenz, die intuitive Vorstellung der Deckungsgleichheit, lässt sich auch auf Vierecke, beliebige n-Ecke und auch krummlinig begrenzte Figuren anwenden. Um die Relation „Figur 1 ist kongruent zu Figur 2“ zu präzisieren, könnte man die Figuren in Dreiecke zerlegen und deren Kongruenz untersuchen. Im Falle der krummlinigen Begrenztheit der Figuren zerlegt man diese in infinitesimale Dreiecke und betrachtet im Zusammenhang mit der Kongruenz Grenzwertprozesse. Dieser Weg ist für den Mathematikunterricht der SI nur bedingt gangbar.

### 1.1.2 intuitive Deckungsgleichheit

Was bleibt ist die intuitive Idee der Deckungsgleichheit: Zwei Figuren sind kongruent zueinander wenn sie so aufeinander plazieren kann, dass „es genau passt“. Was mit dieser Idee gemeint ist, ist intuitiv sicher klar. Für eine formal korrekte Definition der Kongruenz beliebiger Figuren bedarf es einer Präzisierung. Diese Präzisierung erfolgt über den Begriff der Bewegung bzw. der Kongruenzabbildung. Bewegungen leisten gerade das, was man sich unter der intuitiven Deckungsgleichheit vorstellt. Sollten zwei Figuren deckungsgleich zueinander sein, dann gibt es eine Abbildung, die die eine Figur auf die andere abbildet. Derartige Abbildungen heißen Bewegungen bzw. Kongruenzabbildungen. Unmittelbar einsichtig sind die folgenden Vorstellungen:

- a) Zwei Kreise sind kongruent, wenn sie denselben Radius haben.
- b) Zwei Quadrate sind kongruent, wenn ihre Seitenlängen übereinstimmen.
- c) Zwei Rechtecke sind kongruent, wenn ihre Längen und ihre breiten jeweils übereinstimmen.
- d) Zwei Ellipsen sind kongruent, wenn sie in den langen und den kurzen Halbachsen jeweils übereinstimmen.

Die Längen von Strecken dürfen bei einer Kongruenzabbildung respektive Bewegung also nicht verändert werden.

## 1.2 Bewegungen

### 1.2.1 Definition des Begriffs

#### Definition 1.2

*Bewegung*

*Eine Bewegung ist eine abstandserhaltende Abbildung der Ebene auf sich.*

Die Definition noch einmal in anderer Formulierung:

Es sei  $\varphi$  eine Abbildung der Ebene  $\varepsilon$  auf sich.  $\varphi$  heißt Bewegung, wenn gilt:

$$\forall A, B \in \varepsilon : |AB| = |\varphi(A)\varphi(B)|$$

Wir wollen uns darauf einigen, dass wir das Bild von  $A$  bei der Bewegung bzw. Abbildung  $\varphi$  als  $A'$  schreiben, um die sperrige Schreibweise  $\varphi(A)$  zu vermeiden. Also

$$\varphi : \varepsilon \rightarrow \varepsilon \text{ heißt Bewegung} : \Leftrightarrow \forall A, B \in \varepsilon : |AB| = |\varphi(A)\varphi(B)| = |A'B'|$$

Definieren kann man viel, wenn der Tag lang ist. Es bleibt nachzuweisen, dass man nicht die leere Menge definiert hat. Nun zumindest die identische Abbildung ist eine Bewegung.

**Definition 1.3**

*Identische Abbildung id*  
 Die Abbildung die jedem Punkt  $P$  der Ebene sich selbst als Bild zuordnet heißt identische Abbildung. Zur Bezeichnung der Identität wählen wir das Kürzel  $id$ .

Trivialerweise ist  $id$  eine Bewegung.

**Satz 1.1**

*Existenz einer Bewegung*  
 Die identische Abbildung der Ebene auf sich ist abstandserhaltend und damit eine Bewegung.

Natürlich wird es weitere Bewegungen geben. So werden wir im nächsten Kapitel zeigen können, dass Geradenspiegelungen Bewegungen sind.

Wir wollen die Menge aller Bewegungen mit  $\mathbb{B}$  bezeichnen. Abbildungen lassen sich nacheinander ausführen. Wir wollen die Nacheinanderausführung von Abbildungen kurz NAF nennen und führen als Operationszeichen für die NAF von Abbildungen  $\circ$  ein.

**Satz 1.2**

*Gruppe der Bewegungen*  
 $[\mathbb{B}, \circ]$  ist eine Gruppe.

Beweis von Satz 1.2:

**1. Abgeschlossenheit**

Es seien  $\alpha$  und  $\beta$  zwei Bewegungen. Dass  $\alpha \circ \beta$  eine Abbildung der Ebene auf sich ist folgt unmittelbar daraus, dass  $\alpha$  und  $\beta$  Abbildungen der Ebene auf sich sind. Es bleibt zu zeigen, dass  $\alpha \circ \beta$  abstandserhaltend ist:

Weil  $\alpha$  abstandserhaltend ist gilt:  $\forall A, B \in \varepsilon : |AB| = |A'B'|$

Weil  $\beta$  abstandserhaltend ist gilt:  $\forall A', B' \in \varepsilon : |A'B'| = |A''B''|$

Damit gilt auch:  $|AB| = |A''B''|$  und somit ist  $\alpha \circ \beta$  auch abstandserhaltend.

**2. Assoziativität**

Die Assoziativität der NAF von Abbildungen bzw. Funktionen gilt generell für jegliche Funktionen bzw. Abbildungen.

**3. Existenz des Einselements**

$id$  leistet das Verlangte.

**4. Zu jeder Bewegung existiert eine inverse Bewegung**

Hierzu genügt es zu zeigen, dass jede Bewegung  $\varphi$  umkehrbar eindeutig ist. D.h. es ist zu zeigen, dass für jeden beliebigen Bildpunkt  $P' \in \varepsilon$  bei  $\varphi$  die Zuordnung zum Originalpunkt  $P$  eindeutig ist. Letztlich ist zu zeigen, dass nicht zwei verschiedene Punkte  $P$  und  $Q$  durch  $\varphi$  auf  $P'$  abgebildet werden. Wir führen den Nachweis extra.

**Nachweis der umkehrbaren Eindeutigkeit einer Bewegung  $\varphi$ .**

Letztlich ist Folgendes zu zeigen:

Es sei  $\varphi$  eine Bewegung.  $\forall P \in \varepsilon : \varphi(A) = P \wedge \varphi(B) = P \Rightarrow A \equiv B$ .

Der Abstand zweier Punkte  $A$  und  $B$  ist genau dann 0 wenn die beiden Punkte identisch sind.

Wegen der Abstandserhaltung von  $\varphi$  gilt:  $|AB| = |\varphi(A)\varphi(B)| = |PP| = 0$ , also  $|AB| = 0$  und damit  $A \equiv B$ . Der Beweis der umkehrbaren Eindeutigkeit von  $\varphi$  ist damit erbracht.

**1.2.2 Invarianten von Bewegungen**

Wir haben Bewegungen darüber definiert, dass der Abstand zweier beliebiger Punkte bei einer Bewegung erhalten bleibt. Man sagt auch der Abstand zweier Punkte ist eine *Invariante* von Bewegungen. Aus der Abstandstreue von Bewegungen resultieren weitere Invarianten dieser geometrischen Abbildungen. Mit dem Nachweis dieser Invarianten legen wir den Grundstein für eine geauere Untersuchung spezieller Bewegungen, wie etwa die Geradenspiegelungen. Wenn wir etwa zeigen können, dass jede beliebige Bewegung winkeltreu ist, wissen wir, dass auch jede spezielle Bewegung winkeltreu ist. Ein spezieller Nachweis der Winkeltreue von Geradenspiegelungen ist dann nach dem Nachweis, dass Geradenspiegelungen Bewegungen sind, nicht mehr nötig.

**Satz 1.3**

*Invarianz der Zwischenrelation bei Bewegungen*

*Es seien  $\varphi$  eine Bewegung und  $A, B, C$  drei Punkte, von denen  $B$  zwischen  $A$  und  $C$  liegen möge. Für die Bilder  $A', B', C'$  von  $A, B, C$  bei  $\varphi$  gilt dann auch, dass  $B'$  zwischen  $A'$  und  $C'$  liegt.*

Beweis:

V1 Voraussetzung 1:

$$\varphi \text{ ist abstandserhaltend: } \forall P, Q \in \varepsilon : |PQ| = |P'Q'|$$

V2 Voraussetzung 2:

$$Zw(A, B, C)$$

Wir übersetzten V2:  $Zw(A, B, C) \Leftrightarrow |AB| + |BC| = |AC|$  (s. Einführung in die Geometrie, Kapitel: Abstandsaxiome)

Daraus folgt unter zusätzlicher Verwendung von V1:  $|A'B'| + |B'C'| = |A'C'|$  und damit nach der Definition der Relation *zwischen*  $Zw(A', B', C')$ . q.e.d.

Für die folgenden Sätze erinnern wir an das Abstandsaxiom von der Dreiecksungleichung aus der Lehrveranstaltung Einführung in die Geometrie:

### **Axiom 1**

*Dreiecksungleichung*

Für drei beliebige Punkte  $A, B$  und  $C$  gilt:  $|AB| + |BC| \geq |AC|$ .

Falls  $\text{koll}(ABC)$ , dann ist eine der folgenden Gleichungen erfüllt:

(1)  $|AB| + |BC| = |AC|$

(2)  $|AC| + |CB| = |AB|$

(3)  $|BA| + |AC| = |BC|$

Ist umgekehrt eine dieser drei Gleichungen erfüllt, so sind  $A, B$  und  $C$  kollinear.

Ferner sei an den folgenden Satz erinnert, den wir hier als Hilfssatz erwähnen:

### **Hilfssatz 1.1**

*Kollinearität und Zwischenrelation*

Von drei paarweise verschiedenen Punkten einer Geraden liegt genau einer zwischen den anderen beiden.

Damit bleibt natürlich auch die Kollinearität von Punkten invariant bei jeder Bewegung. Damit haben wir die Grundlage für die Beweise der folgenden Sätze gelegt:

### **Satz 1.4**

*Kollineare Punktmengen bei Bewegungen*

Für jede Bewegung gilt:

1. Das Bild einer Geraden ist eine Gerade.
2. Das Bild einer Halbgerade ist eine Halbgerade, wobei der Anfangspunkt des Originals auf den Anfangspunkt des Bildes abgebildet wird.
3. Das Bild einer Strecke ist eine zu ihr kongruente Strecke, wobei die Bilder der Endpunkte der Originalstrecke die Endpunkte der Bildstrecke sind.

Die Beweise ergeben sich unmittelbar aus Satz 1.3, dem Axiom 1 und dem Hilfssatz 1.1.

Mit der Abstandstreue von Bewegungen und den Invarianz von Kollinearität und Zwischenrelation haben wir auch die Grundlagen, um die Winkelstreue von Bewegungen zu schlußfolgern.

### **Satz 1.5**

*Winkelstreue von Bewegungen*

Für jede Bewegung  $\varphi$  gilt: Das Bild eines Winkels  $\alpha$  ist ein zu  $\alpha$  kongruenter Winkel.

### **Beweis von Satz 1.5:**

Es seien  $\varphi$  eine Bewegung und  $\alpha = \angle h, k$  ein Winkel.  $S$  sei der Scheitel von  $\alpha$  und damit der gemeinsame Anfangspunkt der beiden Halbgeraden  $h$  und  $k$ .

Wegen Satz 1.4 wissen wir, dass  $h$  und  $k$  durch  $\varphi$  auf Halbgeraden  $h'$  und  $k'$  abgebildet werden.

Der gemeinsame Anfangspunkt  $S$  wird dabei sowohl auf den Anfangspunkt von  $h'$  als auch auf den Anfangspunkt von  $k'$  abgebildet. Das Bild von  $\alpha$  ist also ein Winkel mit den Schenkeln  $h'$  und  $k'$  und dem Scheitel  $S'$ . Wir wählen auf  $h$  einen beliebigen von  $S$  verschiedenen Punkt  $H$  und auf  $k$  einen von  $S$  verschiedenen Punkt  $K$ . Weil  $h$  auf  $h'$  und  $k$  auf  $k'$  abgebildet, ist das Bild von  $H$  ein Punkt  $H'$  auf  $h'$ . Analog ist das Bild  $K'$  von  $K$  ein Punkt des Strahls  $k'$ . Entsprechend Satz 1.4 gilt nun

$$(1) \overline{SH} \cong \overline{S'H'}$$

$$(2) \overline{SK} \cong \overline{S'K'}$$

$$(3) \overline{HK} \cong \overline{H'K'}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt nach dem Dreieckskongruenzsatz  $SSS$   $\overline{HSK} \cong \overline{H'S'K'}$  und damit letztlich die Kongruenz von  $\alpha = \angle H, S, K$  und seinem Bildwinkel  $\alpha' = \angle H', S', K'$ .

Aus der Winkeltreue folgt die Paralleltreue:

**Satz 1.6**

*Paralleltreue von Bewegungen*

*Es seien  $\varphi$  eine Bewegung und  $a$  und  $b$  zwei Geraden, deren Bilder bei  $\varphi$  wir mit  $a'$  und  $b'$  bezeichnen wollen.*

$$a \parallel b \Rightarrow a' \parallel b'.$$

**Beweis von Satz 1.6:**

Wir betrachten die Punkte  $A \in a$  und  $B \in b$ . Diese werden auf  $A' \in a'$  und  $B' \in b'$  abgebildet. Es seien  $\alpha$  und  $\beta$  zwei Stufenwinkel mit den Scheiteln  $A$  bzw.  $B$  die beim Schnitt von  $a$  und  $b$  durch  $AB$  entstehen. Diese Stufenwinkel werden nun auf Stufenwinkel  $\alpha'$  und  $\beta'$  mit den Scheiteln  $A'$  und  $B'$ , die beim Schnitt von  $a'$  und  $b'$  mit der Geraden  $A'B'$  entstehen.

Weil  $a$  und  $b$  parallel zueinander sind, gilt nach dem Stufenwinkelsatz  $\alpha \cong \beta$ . Wegen der in Satz 1.5 bewiesenen Winkeltreue gilt nun auch  $\alpha' \cong \beta'$ . Aus der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes folgt nun unmittelbar die Parallelität von  $a'$  und  $b'$ .

### 1.3 Eindeutige Bestimmtheit einer Bewegung durch ein Dreieck

Für die Untersuchung von speziellen Bewegungen werden wir häufig auf drei nichtkollineare Punkte und deren Bilder bei den zu untersuchenden Bewegungen zurückgreifen. Es gilt der folgende wichtige Satz:

**Satz 1.7**

*Eindeutige Bestimmtheit von Bewegungen durch ein Dreieck und dessen Bild Jede Bewegung  $\varphi$  ist durch drei nichtkollineare Punkte  $A, B, C$  und deren Bilder  $A', B', C'$  eindeutig bestimmt.*

Der Satz ist wie folgt zu verstehen: Anstelle einer allgemeinen Abbildungsvorschrift für eine Bewegung  $\varphi$  kann man auch ein Dreieck  $\overline{ABC}$  und dessen Bild  $\overline{A'B'C'}$  bei  $\varphi$  vorgeben und für jeden weiteren Punkt  $D$  ist sein Bild  $D'$  bei  $\varphi$  eindeutig bestimmt.

**Beweis von Satz 1.7:** Übungsaufgabe

Hinweis: Geben Sie sich ein Dreieck und dessen Bild vor und konstruieren Sie dann für einen beliebigen Punkt  $D$  sein Bild. Beschreiben Sie dann ihre Konstruktion und Sie haben den Beweis.