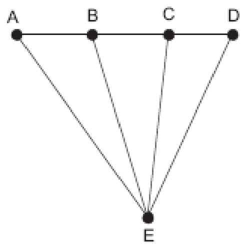
Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 7

(Lösungen)

Aufgaben zur Inzidenzgeometrie:

1. Aufgabe: Gegeben sei eine Punktmenge $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E\}$ und eine dazugehörige Geradenmenge $\mathcal{G} = \{\{A, B, C, D\}, \{A, E\}, \{B, E\}, \{C, E\}, \{D, E\}\}$. Zeigen Sie, dass in dem so konstruierten Modell die Axiome I1 bis I3 gelten.



Zu zeigen gilt, dass die Axiome I1 bis I3 erfüllt sind.

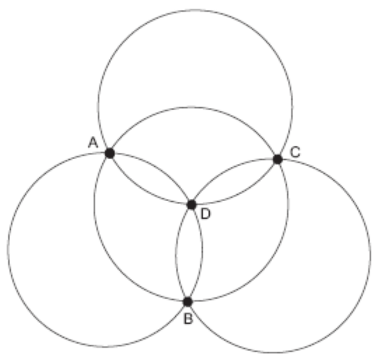
Axiom I1: Wählt man zwei beliebige Punkte aus $\mathcal{P}$ aus, so sind sie in genau einer der Teilmengen der Geradenmenge $\mathcal{G}$ enthalten. Je zwei verschiedenen Punkten wird somit genau eine Gerade zugeordnet.
Axiom I2: Dieses Axiom ist erfüllt, da im vorgestellten Modell jede Gerade aus zwei oder mehr Punkten besteht und somit jede Gerade im Modell mindestens zwei Punkte enthält.
Axiom I3: Beispielsweise liegen die Punkte A, B, E nicht alle auf einer Geraden, daher gibt es mindestens 3 Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

2. Aufgabe: Weisen Sie nach, dass durch:

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D\} \text{ und } \mathcal{G} = \{\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \{B, C, D\}\}$$

kein Modell der Axiomengruppe I gegeben ist. Welches Axiom ist nicht erfüllt?

Lösung: Damit das gegebene Modell kein Modell im Sinne der Inzidenzaxiome ist, reicht es zu zeigen, dass ein Inzidenzaxiom nicht gilt: Durch die Punkte A und B verlaufen zwei verschiedene Geraden: $\{A, B, C\}$ und $\{A, B, D\}$. Dies widerspricht der Eindeutigkeitsaussage („genau eine Gerade") in Axiom I1.



3. Aufgabe: Zeigen Sie: Zu jeder Geraden existiert ein nicht zur Geraden gehörender Punkt.

Lösung: *Voraussetzung:* Gerade g
Behauptung: Es exitiert ein Punkt, der nicht zu g gehört.

Beweis: Aufgrund des Axioms I3 gibt es drei Punkte A, B, C, die nicht kollinear sind. Folglich können nur zwei dieser Punkte zu g gehören. Also existiert ein nicht zu g gehörender Punkt.

4. Aufgabe: Beweisen Sie: Zwei voneinander verschiedene Ebenen haben entweder keinen Punkt oder eine Gerade gemeinsam, auf der alle gemeinsamen Punkte beider Ebenen liegen.

Es seien ε_1 und ε_2 zwei Ebenen.
Fall 1: Die beiden Ebenen haben keinen Punkt gemeinsam.
Dieser Fall ist trivial.
Fall 2: Die beiden Ebenen haben einen Punkt gemeinsam.
sei $P_1 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$
Behauptungen:
1. Es existiert eine Gerade g, die beiden Ebenen angehört:
   $\exists g \in \mathrm{G} : g \subseteq \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$
2. Es existiert kein Punkt, der im Schnitt der beiden Ebenen liegt, aber nicht zu g gehört:
   $\neg \exists P_3 \in \mathrm{P} : P_3 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \wedge P_3 \notin g$

Beweis von Behauptung 1:

(1)	$P_1 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$	Voraussetzung Fall 2
(2)	$\exists P_2 \in P : P_2 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \wedge P_2 \neq P_1$	Axiom I/6: Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, so haben sie noch mindestens einen weiteren Punkt gemeinsam.
(3)	Es existiert genau eine Gerade P_1P_2, die durch beide Punkte geht.	Axiom I/1: Zu zwei beliebigen, voneinander verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, welche diese beiden Punkte enthält.
(4)	$P_1P_2 \subseteq \varepsilon_1$	Axiom I/5: Wenn zwei Punkte einer Geraden g in einer Ebene ε liegen, so liegt jeder Punkt von g in ε.
(5)	$P_1P_2 \subseteq \varepsilon_2$	Axiom I/5: Wenn zwei Punkte einer Geraden g in einer Ebene ε liegen, so liegt jeder Punkt von g in ε.
(6)	$P_1P_2 \subseteq \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$	Folgt aus (4) und (5)

Behauptung 1 ist damit bewiesen.

<u>Beweis von Behauptung 2:</u>
Klassischer Fall für einen indirekten Beweis.
Annahme:
$\exists P_3 \in \mathrm{P} : P_3 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \wedge P_3 \notin g$
(Zeigen wollen wir jetzt natürlich, dass doch $P_3 \in g$ gilt.)

(1)	$P_3 \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \wedge P_3 \notin P_1P_2$	nach Annahme, andere Schreibweise für g
(2)	ε_1 und ε_2 sind zwei verschiedene Ebenen	Voraussetzung für alle unsere Behauptungen
(3)	$P_1 \in \varepsilon_1 \wedge P_1 \in \varepsilon_2$	Punkt aus Beweis Behauptung 1
(4)	$P_2 \in \varepsilon_1 \wedge P_2 \in \varepsilon_2$	Punkt aus Beweis Behauptung 1
(5)	$nkoll(P_1, P_2, P_3)$	(1)
(6)	$\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$	(1), (3), (4), (5) und Axiom I/4: Zu je drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkten gibt es genau eine Ebene, die diese drei Punkte enthält.

↯
(6) ist ein Widerspruch zu ε_1 und ε_2 sind zwei verschiedene Ebenen!
Die Annahme ist zu verwerfen!