4 Die Winkelmaßaxiome

4.1 Winkel

Definition 4.1

Winkel
Die Vereinigungsmenge zweier Strahlen, die einen gemeinsamen Anfangspunkt haben, ist ein Winkel. Die beiden Strahlen heißen Schenkel des Winkels und der gemeinsame Anfangspunkt heißt Scheitelpunkt bzw. Scheitel des Winkels.

Schreibweisen für Winkel:

Schenkel	Scheitel	Schreibweise
h und k	Anfangspunkt von h bzw. k	$\angle h, k$ oder $\angle k, h$
SA^+ und SB^+	S	$\angle ASB$ oder $\angle SA^+, SB^+$

Definition 4.2

Inneres eines Winkels
Unter dem Inneren des Winkels $\angle ASB$ versteht man die Schnittmenge der beiden Halbebenen SA, B^+ und SB, A^+.
$I(\angle ASB) := SA, B^+ \cap SB, A^+$

Satz 4.1

Das Innere eines Winkels ist konvex.

Beweis:

Wir wissen bereits, dass Halbebenen konvex sind und dass der Schnitt zweier konvexer Mengen konvex ist. Das Innere eines Winkels ist damit als Schnitt zweier konvexer Mengen konvex.

4.1.1 Geschichten aus dem Inneren, (Hilfssätze)

Unter einem Lemma versteht der Mathematiker gewisse Hilfssätze.

Lemma 4.1

Wenn A ein Punkt eines Schenkels des Winkels α ist und B ein Punkt des anderen Schenkels von α, dann liegt die Strecke $\overline{AB}$ vollständig im Inneren von α.

Der Beweis dieses Lemmas ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, dass das Innere eines Winkels konvex ist.

Lemma 4.2

$P \in I(\angle ASB) \Rightarrow SP^+ \subset I(\angle ASB)$

Beweis:
Wegen $S, P \in I(\angle ASB)$ und weil $I(\angle ASB)$ konvex ist,
ist zunächst auf jeden Fall $\overline{SA} \subset I(\angle ASB)$. ...

Lemma 4.3

Es sei $\angle ASB$ ein Winkel. Jeder Strahl, der vollständig im Inneren von $\angle ASB$ liegt und S als Anfangspunkt hat, schneidet die Strecke $\overline{AB}$.

Ohne Beweis, das Lemma darf so benutzt werden.

4.2 Winkel messen

Axiom 4.1

Winkelmaßaxiom Zu jedem Winkel α gibt es genau eine reelle Zahl ω zwischen 0 und 180.

Definition 4.3

Größe eines Winkels
Die Zahl ω, die entsprechend des Winkelmaßaxioms einem jeden Winkel α eindeutig zugeordnet werden kann, wird die Größe oder das Maß von α genannt.//[0.2cm]In Zeichen: $\omega = |\alpha|$.

4.3 Winkel konstruieren, Existenz und Eindeutigkeit des Winkelantragens

Axiom 4.2

Winkelkonstruktionsaxiom Es sei $g \equiv SA$ eine Gerade in der Ebene ε. Zu jeder reellen Zahl ω mit $0 < \omega < 180$ gibt es in jeder der beiden durch g bestimmten Halbebenen der Ebene ε genau einen Strahl SB^+ mit $\omega = |\angle ASB|$

4.4 Winkeladdition

Axiom 4.3

Winkeladditionsaxiom Wenn der Punkt P zum Inneren des Winkels $\angle ASB$ gehört , dann gilt $|\angle ASP| + |\angle PSB| = |\angle ASB|$.

Satz 4.2

Wenn der Punkt P im Inneren des Winkels $\angle ASB$ und nicht auf einem der Schenkel des Winkels $\angle ASB$ liegt, dann ist die Größe der beiden Teilwinkel $\angle ASP$ und $\angle PSB$ jeweils kleiner als die Größe des Winkels $\angle ASB$.

Beweis:

(I)	$\lvert\angle ASP\rvert + \lvert\angle PSB\rvert = \lvert\angle ASB\rvert$	Axiom 4.3
(II)	$\lvert\angle ASP\rvert = \lvert\angle ASB\rvert - \lvert\angle PSB\rvert$	(II)
(III)	$\lvert\angle ASP\rvert < \lvert\angle ASB\rvert$	(II), Axiom 4.1
(IV)	$\lvert\angle PSB\rvert < \lvert\angle ASB\rvert$	analog

4.5 Rechte Winkel

Definition 4.4

Nebenwinkel
Zwei Winkel heißen Nebenwinkel, wenn sie einen Schenkel gemeinsam haben und die Vereingungsmenge der beiden jeweils anderen Schenkel eine Gerade ist.

Definition 4.5

Rechter Winkel Wenn ein Winkel die selbe Größe wie einer seiner Nebenwinkel hat, so ist er ein rechter Winkel.

Definition 4.6

Supplementärwinkel
Zwei Winkel heißen supplementär, wenn die Summe ihrer Größen 180 beträgt.

Axiom 4.4

Supplementaxiom Nebenwinkel sind supplementär.

Satz 4.3

Existenz von rechten Winkeln
Wenn ein Winkel die Größe 90 hat, dann ist er ein rechter Winkel.

Beweis:

Es sei α ein Winkel mit der Größe 90. β sei ein Nebenwinkel von α. Weil α und β ein Paar von Nebenwinkeln sind, ergänzen sie sich nach dem Supplementaxiom zu 180. Unter Verwendung der bekannten Größe von α ergibt sich folgende Schlusskette:

$$|\alpha| + |\beta| = 180 \quad (1)$$
$$90 + |\beta| = 180 \quad (2)$$
$$|\beta| = 90 \quad (3)$$
$$|\beta| = |\alpha| \quad (4)$$

Satz 4.4

Jeder rechte Winkel hat das Maß 90.

Beweis:

Es sei α ein rechter Winkel und β ein Nebenwinkel, der so groß wie α ist.

(I)	$\lvert\alpha\rvert = \lvert\beta\rvert$	Definition des rechten Winkels
(II)	$\lvert\alpha\rvert + \lvert\beta\rvert = 180$	Supplementaxiom
(III)	$2\lvert\alpha\rvert = 180$	(I) und (II)
(IV)	$\lvert\alpha\rvert = 90$	(III)

4.6 Die Relation Senkrecht auf der Menge der Geraden

Definition 4.7

Relation senkrecht auf der Menge der Geraden
Es seien g und h zwei Geraden. Wenn sich g und h schneiden und bei diesem Schnitt rechte Winkel entstehen, dann stehen die Geraden g und h senkrecht aufeinader.
In Zeichen: $g \perp h$

Definition 4.8

noch mehr senkrecht

(a) $g \perp \overline{AB} :\Leftrightarrow g \perp AB$

(b) $\overline{AB} \perp \overline{CD} :\Leftrightarrow AB \perp CD$

(c) $g \perp \varepsilon :\Leftrightarrow \exists a, b \subset \varepsilon : a \not\equiv b \wedge g \perp a \wedge g \perp b$

(d) $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 :\Leftrightarrow \exists a, b, c : c = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2, a \subset \varepsilon_1, b \subset \varepsilon_2, a \perp b \wedge a \perp c \wedge b \perp c$

Satz 4.5

Existenz und Eindeutigkeit der Senkrechten zu einer Geraden auf einem Punkt dieser Geraden
Es sei g eine Gerade der Ebene ε. Ferner sei P ein Punkt auf g. In der Ebene ε gibt es genau eine Gerade s, die durch P geht und senkrecht auf g steht.

Beweis:
Wir wählen einen von P verschiedenen Punkt auf g und nennen ihn A. In jeder, der durch g bestimmten Halbebenen von ε gibt es nach dem Winkelkonstruktionsaxiom genau einen Strahl PB^+, der zusammen mit dem Strahl PA^+ einen Winkel der Größe 90 also einen rechten Winkel ergibt. Damit steht die Gerade PB senkrecht auf g. Weil einrechter Winkel dann und nur dann ein rechter Winkel ist, wenn er die Größe 90 hat und weil die Winkelantragung anch dem Winkelkonstruktionsaxiom eindeutig ist, ist auch die Senkrechte in P auf g durch PB eindeutig bestimmt.

4.7 Mittelsenkrechte

Definition 4.9

Mittelsenkrechte einer Strecke
Es sei $\overline{AB}$ eine Strecke mit dem Mittelpunkt M. Wenn die Gerade m durch M geht und senkrecht auf $\overline{AB}$ steht, dann ist sie Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$.

Satz 4.6

Existenz und Eindeutigkeit der Mittelsenkrechten
Jede Strecke hat genau eine Mittelsenkrechte.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar

(1) aus der Existenz und Eindeutigkeit des Mittelpunktes M einer Strecke $\overline{AB}$ und

(2) aus der Existenz und Eindeutigkeit der Senkrechten in M auf AB.

4.8 Winkelhalbierende

Definition 4.10

Winkelhalbierende
SP^+ ist Winkelhalbierende des Winkels $\angle ASB$, wenn

(1) $SP^+ \subset I(\angle ASB)$ und

(2) $|\angle ASP| = |\angle PSB|$.

Satz 4.7

Existenz und Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden
Jeder Winkel hat genau eine Winkelhalbierende.

Beweis:

Existenzbeweis:

Gegeben sei der Winkel $\angle ASB$. Wir zeigen, dass $\angle ASB$ eine Winkelhalbierende hat.

(I)	$\exists \omega \in \mathbb{R} : \omega = \|\angle ASB\|$	Winkelmaßaxiom
(II)	$\exists SP^+ \subset SA, B^+ : \|\angle ASP\| = \frac{\omega}{2}$	Winkelkonstruktionsaxiom
(III)	$SP^+ \subset I(\angle ASB)$	beweisen wir später
(IV)	$\|\angle ASP\| + \|\angle PSB\| = \|\angle ASB\|$	(III) und Winkeladditionsaxiom
(V)	$\frac{\omega}{2} + \|\angle PSB\| = \|\angle ASB\|$	(III), (II), (I)
(VI)	$\|\angle PSB\| = \frac{\omega}{2}$	(V)
(VII)	$\|\angle ASP\| = \|\angle PSB\|$	(VI) und (II)

SP^+ ist damit die gesuchte Winkelhalbierende von $\angle ASB$.
Es bleibt zu zeigen, dass $SP^+ \subset I(\angle ASB)$ gilt. Wir nehmen an, dass $SP^+ \not\subset I(\angle ASB)$ gilt. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass SP^+ in SA, B^+ angetragen wurde, kann jetzt nur noch $SB^+ \subset I(\angle ASP)$ gelten. Damit würde nach dem Winkeladditionsaxiom $\omega + |\angle BSP| = \frac{\omega}{2}$ gelten. Dasist aber nicht möglich, weil unsere Winkel nach dem Winkelmaßaxiom keine negativen Größen haben können.

Eindeutigkeitsbeweis:

Wir nehmen an, dass $\angle ASB$ zwei Winkelhalbierende hat. Seien dieses die Halbgeraden SP^+ und SQ^+. Jetzt gilt:

(I)	$\|\angle ASP\| = \|\angle PSB\|$	SP^+ ist Winkelhalbierende von $\angle ASB$
(II)	$\|\angle ASQ\| = \|\angle QSB\|$	SQ^+ ist Winkelhalbierende von $\angle ASB$
(III)	$\|\angle ASP\| + \|\angle PSB\| = \|\angle ASB\|$	Winkeladditionsaxiom
(IV)	$\|\angle ASQ\| + \|\angle QSB\| = \|\angle ASB\|$	Winkeladditionsaxiom
(VI)	$\|\angle ASP\| = \|\angle ASQ\| = \frac{1}{2}\|\angle ASB\|$	(I), (II), (III) , (IV)
(V)	$SP^+ \equiv SQ^+$	(VI) und Winkelkonstruktionsaxiom