Übungsaufgaben Serie X

2. Übungsklausur

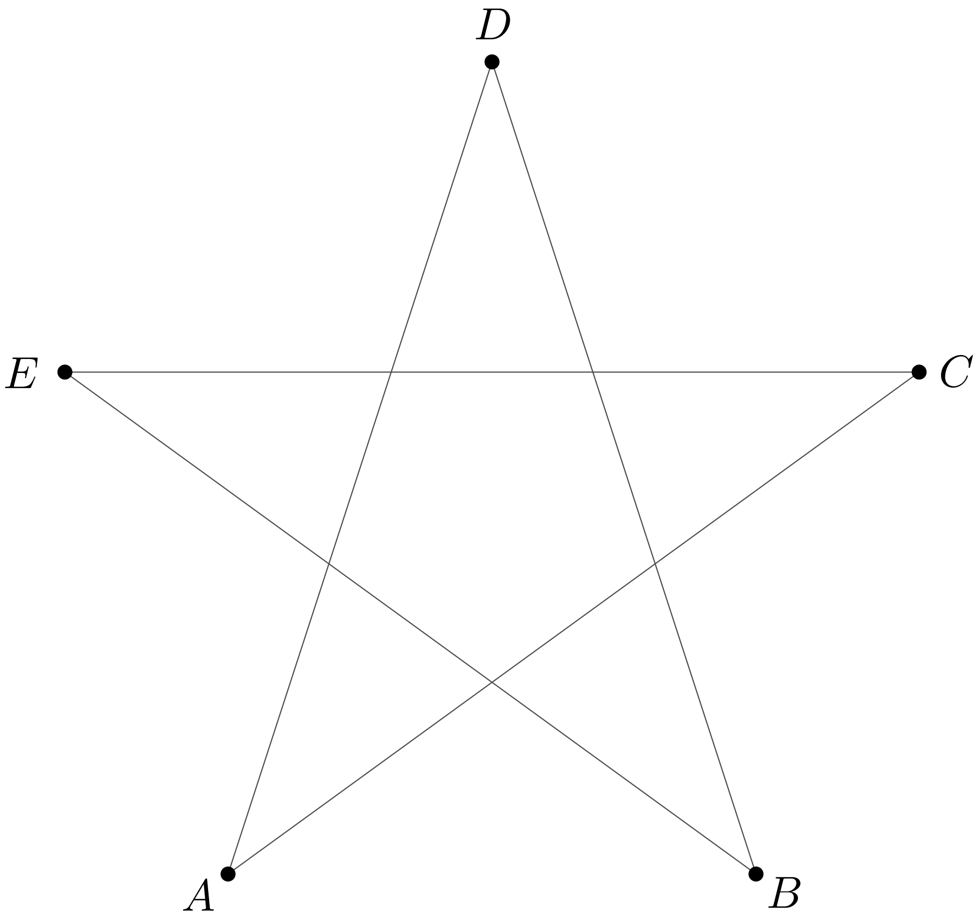


Abbildung 1: Pentagramm

Aufgabe 10.1: Definitionen

a) Definieren Sie den Begriff *Kreistangente*. (*2 Punkte*)

Eine Gerade die einen Kreis in genau einem Punkt berührt $P \in g \wedge P \in k$

b) Definieren Sie, was man in der ebenen Geometrie unter einer *Ellipse* mit den Brennpunkten F_1 und F_2 versteht. (Hinweis: Der Mörder ist immer der Gärtner.) (*2 Punkte*)

$P := \{P \mid |F_2P| + |F_1P| = r\}$

c) Definieren Sie den Begriff *Kreis* unter Verwendung des Oberbegiffs Ellipse. (*2 Punkte*)

Eine Ellipse deren Brennpunkte aufeinander liegen

d) Ein *Tangentenviereck* ist ein Viereck mit einem Inkreis. Definieren Sie den Begriff *Tangentenviereck* unter expliziter Verwendung des Begriffs Tangente. (*3 Punkte*)

Ein Viereck dessen Seiten die Tangenten für sein Innkreis sind

e) In der Gothicszene sind Pentagramme sehr beliebt. Definieren Sie den Begriff *Pentagramm* (siehe Abbildung 1). Sie dürfen auf die Definitionen aus Aufgabe 9.1 der letzten Aufgabenserie zurückgreifen. (*2 Punkte*)

$P := \{P \mid \overline{AB} \cap \overline{BC} \cap \overline{CD} \cap \overline{DE} \cap \overline{EA}\}$

Aufgabe 10.2

In der Ebene ε seien die Gerade g und der nicht mit g inzidierende Punkt A gegeben. Ferner seien B und C zwei Punkte mit nkoll(A, B, C).
Beweisen Sie:

$$\underline{B \in gA^+ \wedge C \in gA^+} \Rightarrow C \in gB^+$$

(4 Punkte)

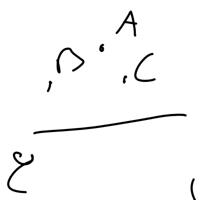
Beweis:

V: $A \notin g$ $\quad$ B: $C \in gB^+$

V_2 nkoll(A, B, C)

V_3 $B \in gA^+$

V_4: $C \in gA^+$



(2) $\overline{AB} \in gA^+ \wedge \overline{AC} \in gA^+ \wedge \overline{BC} \in gA^+$ $(V_{1,2,3,4})$

(3) $g \cap \overline{AB} = \emptyset$ $\quad g \cap \overline{AC} = \emptyset$ $\quad g \cap \overline{BC} = \emptyset$ (2)

(4) $\overline{ABC} \cap g = \emptyset$ (3)

(5) $C \in gB^+$ (Pasch) (4)

Aufgabe 10.3

Es seien A, B, C, D vier paarweise verschiedene Punkte ein und derselben Geraden g. Beweisen Sie:

$$|AB| = |BD| \wedge |AC| = |CD| \Rightarrow B \equiv C$$

Hinweis: Ein in der Vorlesung bereits im Kontext der Anordnungsaxiome bewiesener Satz kann die Arbeit erheblich erleichtern. (*3 Punkte*)

Beweis: V_1 $|AB| = |BD|$ V_2: $|AC| = |CD|$ B: $B \equiv C$

A $B \not\equiv C$

(1) $|AB| + |BD| = |AD|$ (V_1)

(2) $|AC| + |CD| = |AD|$ (V_2)

(3) $|AC| + |AC| = |AD|$ (Lineal)

(4) $|AB| + |AB| = |AD|$ (Lineal

(5) $2|AB| = 2|AC|$

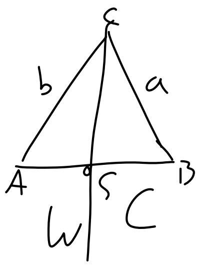
(6) $|AB| = |AC|$ ↯ zu A

(7) $B \equiv C$

Aufgabe 10.4

Beweisen Sie:

Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist,
dann liegt die Winkelhalbierende seines seiner Basis gegenüberliegenden Innenwinkels auf der Mittelsenkrechten dieser Basis. (*3 Punkte*)



Beweis: V_1 $a = b$ B: $M \in w$

(1) $\overline{CS} \cong \overline{CS}$ (trivial)

(2) Winkelhalb w

(3) $\angle ACS \cong \angle BCS$ (2)

(4) $\exists S$ $S \in w \wedge S \in w$ (2)(G.a.d I)

(5) $\overline{ACS} \cong \overline{BCS}$ (SWS)(1)(3)(V_1)

(6) $\overline{AS} \cong \overline{BS}$ (5)

(7) S ist M (6)(III.1)

(8) $\angle ASC \cong \angle BSC$ (kongruente NW) (5)
↳ RW

(9) $\overline{CS} \perp \overline{AB}$ (8)

(10) $C \in w \wedge S \in w \wedge C \in m \wedge C \in S$ (2)(V)(9)

(11) $m \cong w$ (10)

Aufgabe 10.5

Es seien a und b zwei Geraden mit $a \perp b$. Der gemeinsame Schnittpunkt der beiden Geraden sei mit S bezeichnet.
Ferner sei A ein Punkt, der weder auf a noch auf b liegt. Zwei weitere Punkte B und C seien derart gewählt, dass die folgenden Eigenschaften gelten:

a) a ist die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$,

b) b ist die Mittelsenkrechte von $\overline{BC}$,

Beweisen Sie:

$$\angle ASB \text{ und } \angle BSC \text{ sind supplementär.}$$

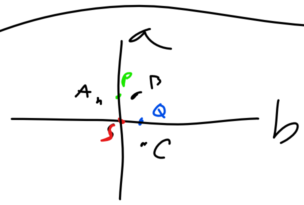
(4 Punkte)

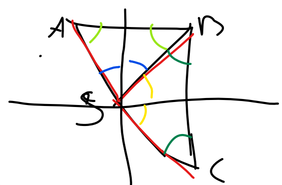
Beweis: V_1 $a \perp b$ V_2: $S \in a \wedge S \in b$ B: $\angle ASB$ sup $\angle BSC$

V_3: $A \notin a \wedge A \notin b$

V_4: a Mittelsenkr. $\overline{AB}$

V_5: b " BC





(1) $\exists P$: $P \in a \wedge P \in \overline{AB}$ (Mittelp.)
↳ $|AP| = |BP|$
"

(2) $\exists Q$ $Q \in b \wedge Q \in \overline{BC}$

T_1 (3) $\overline{PS} \cong \overline{PS}$ (Triv)

(4.5) $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ (V_4)

(4) $\angle AQS \cong \angle BQS$ (V_4)

(5) $\triangle AQS \cong \triangle BQS$ (SWS)(3)(4)(4.5)

(6) $\overline{AS} \cong \overline{BS}$ (5)

T_2 analog für BSQ

(8) $\overline{AS} \cong \overline{BS} \cong \overline{CS}$ (T_2)

(9) $\overline{AS} \cong \overline{CS}$

(10) $|AS| = |CS|$ (9)
$= |BS|$

(11) $\boxed{2} + \boxed{2} = 180$
$\boxed{2} = 180° - \boxed{2}$
$\boxed{2} = 180° - \boxed{2}$

(12) $\boxed{2} + \boxed{2} = 180°$

(13) $\boxed{2} + \boxed{2} = 180°$

(14) $\boxed{2} + 180° - \boxed{2} = 180$
↳ $\boxed{2} = \boxed{2}$

(15) $\boxed{2} + 180 - \boxed{2} = 180$
↳ $\boxed{2} = \boxed{2}$

(16) $\boxed{2} + \boxed{2} = 180°$ (11),(12)(13)(14)(15)

(17) $\angle ASB + \angle BSC = 180°$

(18) $\angle ASB$ supp $\angle BCS$ (17)

Aufgabe 10.6

Definition 9.1

Einheitskreis
Es sei k ein Kreis mit dem Radius r.
Wenn $|r| = 1$ gilt, dann heißt k Einheitskreis.

Definition 9.2

Sinus von 30°
Es sei k ein Einheitskreis mit dem Mittelpunkt M. A und B seien zwei Punkte auf k mit $|\angle AMB| = 30°$. Unter dem Sinus von 30° versteht man die Länge des Lotes l von B auf MA. ($\sin 30° := |l|$)

Beweisen Sie in der absoluten Geometrie: $\sin 30° = \frac{1}{2}$ (*5 Punkte*)

Beweis:

Platz für weitere Ausführungen