LÖSUNG ELEMTARGEOMETRIE AUFGABE 1

GHS/ALT, THEMA I, AUFGABE A; RL/ALT, THEMA I, AUFGABE A; SOPÄD/NEU, THEMA I, AUFGABE A; GHS/NEU, THEMA I, AUFGABE A; RL/NEU, THEMA I, AUFGABE B

AUFGABE

Entsprechend Abbildung 1 wird der Punkt P der Reihe nach durch die Drehstreckungen $\delta_1 = DS_{Z,\alpha_1,k_1}$, $\delta_2 = DS_{Z,\alpha_2,k_2}$ und $\delta_3 = DS_{Z,\alpha_3,k_3}$ auf die Punkte P', P'' und schließlich auf P''' abgebildet.

Es möge $\overline{ZP} \cong \overline{PP'} \cong \overline{P'P''} \cong \overline{P''P'''}$ gelten.

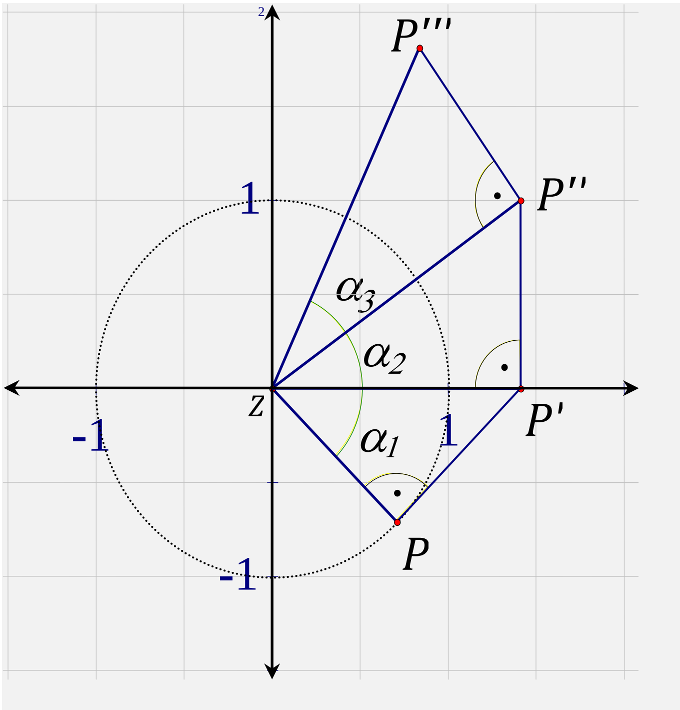


Abbildung 1

a) Berechnen Sie jeden der Streckfaktoren k_1, k_2 und k_3. Begründen Sie Ihre Überlegungen.
b) Berechnen Sie den Streckfaktor k der Drehstreckung, die durch die Nacheinanderausführung $\delta_3 \circ \delta_2 \circ \delta_1$ entsteht (erst δ_1, dann δ_2 , dann δ_3).
c) Beweisen Sie: $\alpha_1 = 45°$, $\alpha_3 = 30°$ und $\tan(\alpha_2) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
d) Wir betrachten die Drehstreckung $\varphi = DS_{Z,\beta,k} = \delta_3 \circ \delta_1$ (erst δ_1 dann δ_3). Das Bild A' eines beliebigen Punktes A bei φ soll nur mit Zirkel und Lineal konstruiert werden. Geben Sie eine entsprechende Konstruktionsvorschrift an. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktionsvorschrift. Beachten Sie, dass bei Zirkel und Lineal-Konstruktionen das Lineal keine verfügbare Skala zum Messen hat.
e) Die Idee der Konstruktion der Punkte P', P'', P''' ist der *Spirale des Theodorus* nachempfunden. Wir stellen uns vor, das Verfahren zur Konstruktion weiterer Punkte $P'''', P''''', \ldots$ wird analog fortgesetzt (*Theodorus* wurde nach 17maliger Ausführung der Konstruktion unterbrochen). Welche Länge hätte die Strecke $\overline{ZP''''''''''''}$ (P 12-fach gestrichen)? Geben Sie die Konstruktionsvorschrift einer einfacheren Konstruktion für eine Strecke mit einer derartigen Länge an und begründen Sie diese Vorschrift.

LÖSUNG

TEILAUFGABE A)

$\lvert P'Z\rvert$	$\lvert P''Z\rvert$	$\lvert P'''Z\rvert$
$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$	$\sqrt{\sqrt{2}^2+1^2}=\sqrt{3}$	$\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$
Punkte		
1	1	1
Begründung: Satz des Pythagoras		
1 Punkt		

k_1	k_2	k_3
$k_1=\frac{\lvert P'Z\rvert}{\lvert PZ\rvert}$ $k_1=\frac{\sqrt{2}}{1}$ $k_1=\sqrt{2}$	$k_2=\frac{\lvert P''Z\rvert}{\lvert P'Z\rvert}$ $k_2=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ $k_2=\sqrt{\frac{3}{2}}$	$k_1=\frac{\lvert P'''Z\rvert}{\lvert P''Z\rvert}$ $k_1=\frac{2}{\sqrt{3}}$ $k_1=\sqrt{\frac{4}{3}}$
Punkte:		
1	1	1
Begründung: $\frac{\text{Bildstrecke}}{\text{Originalstrecke}}$		
1 Punkt		

Punkte für Teil a) insgesamt:	8

TEILAUFGABE B)

Variante 1: $\frac{\text{Bildstrecke}}{\text{Originalstrecke}}$

$$k=\frac{\lvert P'''Z\rvert}{\lvert PZ\rvert}=\frac{2}{1}=2$$

Variante 2: Multiplikation der Streckfaktoren der Streckungen, aus denen sich die Gesamtabbildung zusammensetzt

$$k=k_1\cdot k_2\cdot k_3$$

$$k=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 3}}=\sqrt{4}=2$$

Punkte:	2

TEILAUFGABE C)

Beweis, dass $\alpha_1 = 45°$

Variante 1: gleichschenkliges Dreieck

Nr.	Beweisschritt	Begründung
(1)	$\overline{ZP} \cong \overline{PP'}$	Voraussetzung, Konstruktion
(2)	$\lvert\angle ZPP'\rvert = 90°$	Konstruktion
(3)	Das Dreieck (ZPP') ist rechtwinklig und gleichschenklig.	(1) und (2)
(4)	$\alpha_1 = \angle PZP' = \angle PP'Z = \frac{180° - 90°}{2} = 45°$	(3) und Innenwinkelsumme im Dreieck

Variante 2: Tangens

$$\tan\alpha_1 = \frac{|PP'|}{|ZP|} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\alpha_1 = \arctan(\tan\alpha_1) = \operatorname{atan} 1 = 45°$$

Punkte:	2

Beweis, dass $\alpha_1 = 30°$:

Variante 1: gleichseitiges Dreieck

Es sei P'''' das Bild von P'''bei einer Spiegelung an ZP''.

Dann ist das Dreieck $\overline{ZP''''P'''}$ ein gleichseitiges Dreieck.

Alle Innenwinkel dieses Dreiecks haben damit die Größe 60°.

Der Winkel $\angle P''''ZP'''$ ist ein Innenwinkel des genannten Dreiecks und hat damit auch die größe 60°.

Weil der Strahl ZP''^{+} entsprechend der Konstruktion von P'''' die Winkelhalbierende des Winkels $\angle P''''ZP'''$ ist,
gilt

$$|\alpha_3| = |\angle P''ZP'''| = \frac{|\angle P''''ZP'''\,|}{2} = \frac{60°}{2} = 30°.$$

Variante 2: Sinus

$$\sin\alpha_3 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_3 = \arcsin(\sin\alpha_3) = \arcsin\frac{1}{2} = 30°$$

Punkte:	2

Beweis, dass $\tan(\alpha_2) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$:

$$\tan \alpha_2 = \frac{|P''P'|}{|P'Z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Punkte:	2

Punkte für Teil c) insgesamt:	6

TEILAUFGABE D)

Wir bestimmen zunächst den Streckfaktor k der resultierenden Drehstreckung:

$$k = k_1 \cdot k_3$$

$$k = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$k = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Der Drehwinkel β der resultierenden Drehstreckung φ berechnet sich zu:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 45° + 30° = 75°$$

Konstruktionsbeschreibung:

Es sei also A ein beliebiger Punkt.

Fall 1: $A \equiv Z$

Z ist ein Fixpunkt bei φ. Damit wird auch A auf sich selbst abgebildet.

Fall 2: $A \not\equiv Z$

Grundlegende Idee der Konstruktion:

Es ist egal, ob zuerst gestreckt und dann gedreht, oder erst gedreht und dann gestreckt wird.

(A) Zentrische Streckung

Wir beginnen mit der Streckung. Für das Bild A^* von A bei dieser Streckung an Z mit dem Streckfaktor $2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ muss entsprechend der Definition „zentrische Streckung“ gelten:

(I) $\quad \mathrm{Zw}(Z, A, A^*)$

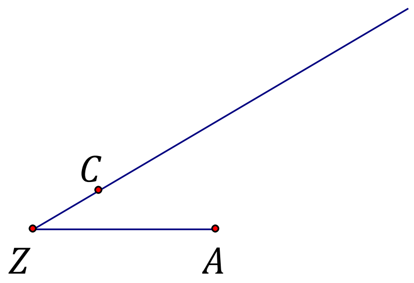
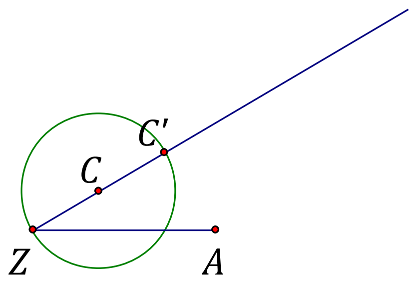
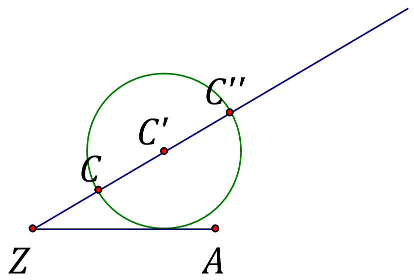
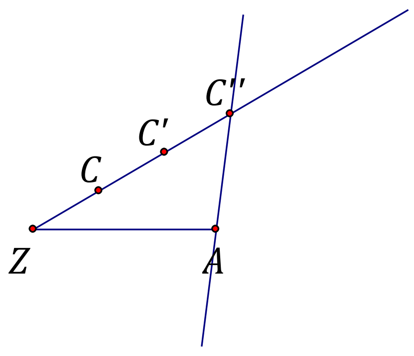
(II) $\quad \frac{|ZA^*|}{|ZA|} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$

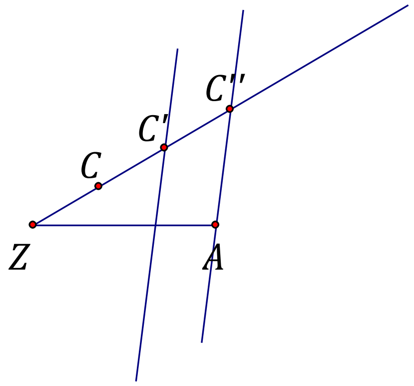
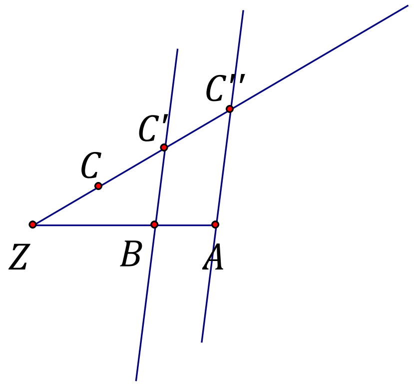
Lösung: Elemtargeometrie Aufgabe 1

GHS/alt, Thema I, Aufgabe A; RL/alt, Thema I, Aufgabe A; SoPäd/neu, Thema I, Aufgabe A; GHS/neu, Thema I, Aufgabe A; RL/neu, Thema I, Aufgabe B

Teilkonstruktion 1:

Wir konstruieren uns eine Strecke $\overline{ZB}$ mit $|ZB| = \frac{2}{3}|AB|$.

Konstruktionsschritt	Erklärung	ggf. Begründung der Korrektheit
	Wählen einen beliebigen Punkt C mit nkoll(A, Z, C). Konstruieren dann ZC^+.	Existenz eines solchen Punktes ist gesichert. Existenz und Eindeutigkeit von ZC^+ ebenso
	Tragen auf CZ^- $\lvert ZC\rvert$ ab und erhalten C' mit $\lvert CC'\rvert = \lvert ZC\rvert$.	Existenz und Eindeutigkeit des Streckenabtragens.
	Tragen auf $C'C^-$ $\lvert ZC\rvert$ab und erhalten C'' mit $\lvert C''C'\rvert = \lvert CC'\rvert = \lvert ZC\rvert$-	Existenz und Eindeutigkeit des Streckenabtragens.
	Konstruieren Gerade AC''.	Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

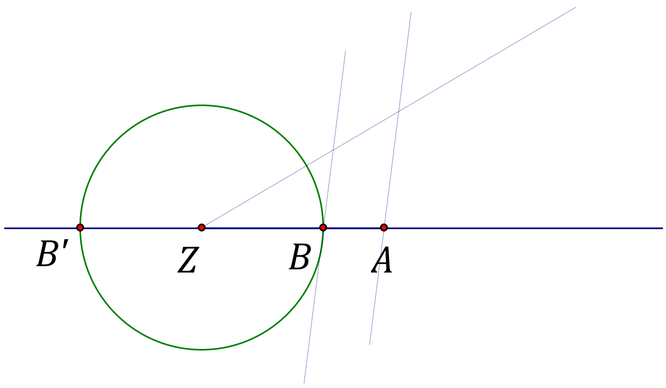
	Konstruieren Parallele durch C'' zu AC''.	Existenz und Eindeutigkeit von Parallelen.
	Diese Parallele schneidet ZA in einem Punkt B.	Wäre die Parallele durch C' zu AC'' parallel zu ZA müsste ZA wegen der Transitivität der Relation „parallel" auch parallel zu $C''A$ sein. Da $C''A$ und ZA jedoch den Punkt A gemeinsam haben, können sie nicht parallel sein.

Wegen $|ZC'| = \frac{2}{3}|ZC''|$ und der Parallelität von BC' zu AC'' gilt nach dem ersten Strahlensatz:

$$|ZB| = \frac{2}{3}|AB|.$$

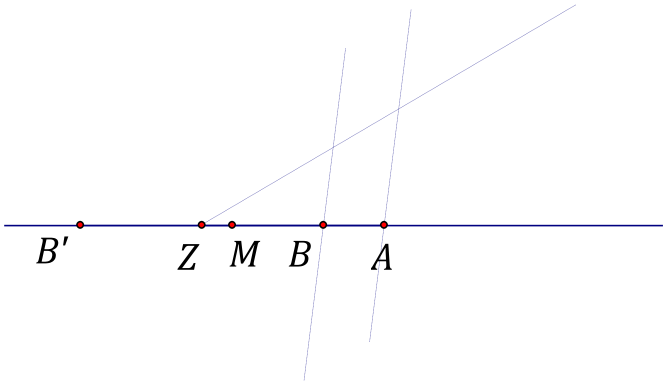
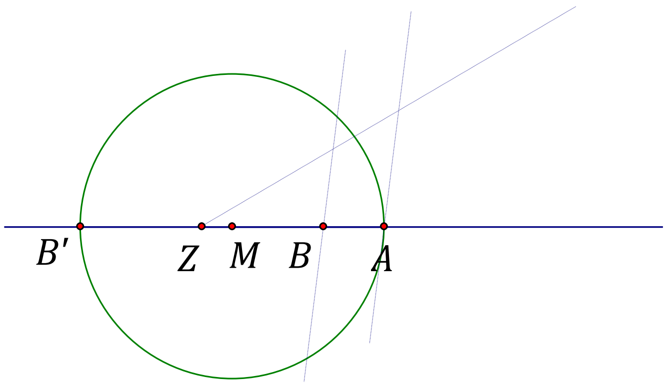
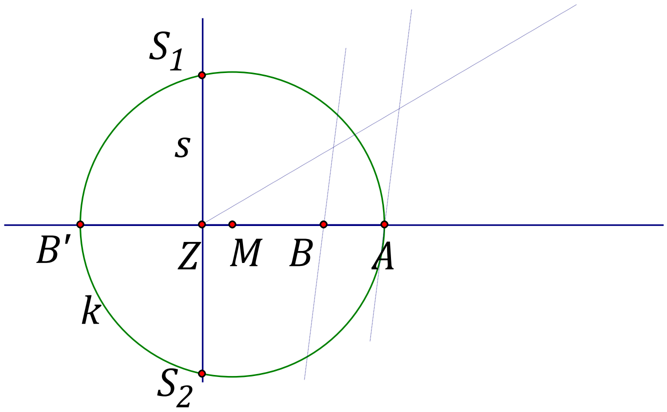
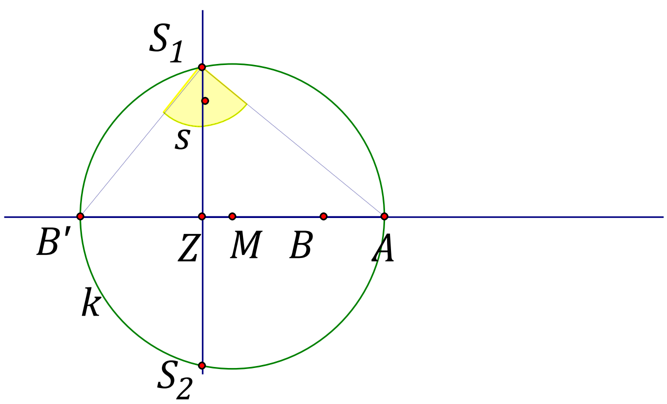
Teilkonstruktion 2:

Wir konstruieren uns auf ZA^+ eine Strecke $\overline{ZA^*}$mit der Länge $2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}|AB|$.

	Tragen $\lvert ZB\rvert$ auf ZB^- ab und erhalten B'.	Existenz und Eindeutigkeit des Streckenabtragen s.

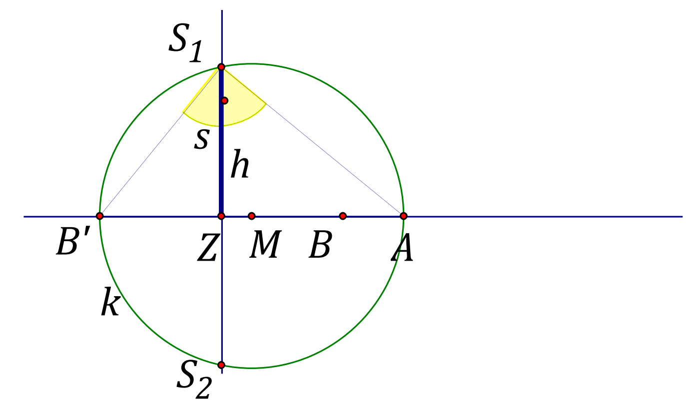
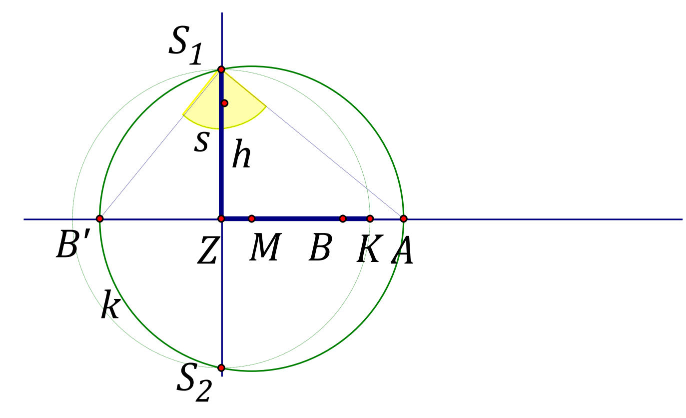
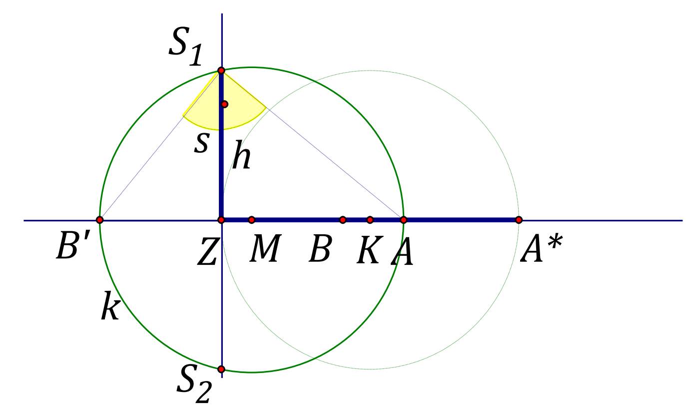
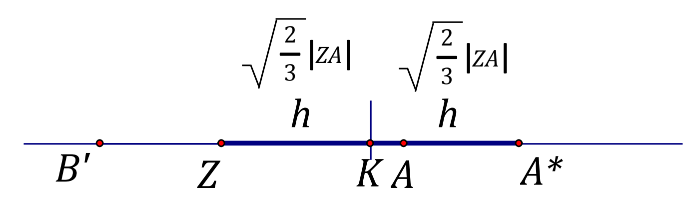
Lösung: Elemtargeometrie Aufgabe 1

GHS/ALT, THEMA I, AUFGABE A; RL/ALT, THEMA I, AUFGABE A; SOPÄD/NEU, THEMA I, AUFGABE A; GHS/NEU, THEMA I, AUFGABE A; RL/NEU, THEMA I, AUFGABE B

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Konstruieren den Mittelpunkt M von $\overline{B'A}$.</td>
<td>Existenz und Eindeutigkeit des Mittelpunktes einer Strecke.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Konstruieren Kreis k um Z durch B' und A.</td>
<td>M ist Mittelpunkt von $\overline{B'A}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Konstruktion der Senkrechten s auf MA in Z. Wir erhalten die Schnittpunkte S_1 und S_2 von s mit k.</td>
<td>Existenz und Eindeutigkeit der Senkrechten, Schnittpunkte von Kreis und Gerade,</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Das Dreieck $\overline{B'AS_1}$ ist rechtwinklig, wobei $\angle AS_1B$ der rechte Winkel ist.</td>
<td>Satz des Thales</td>
</tr>
</table>

Lösung: Elemtargeometrie Aufgabe 1

GHS/alt, Thema I, Aufgabe A; RL/alt, Thema I, Aufgabe A; SoPäd/neu, Thema I, Aufgabe A; GHS/neu, Thema I, Aufgabe A; RL/neu, Thema I, Aufgabe B

	$\overline{ZS_1}$ ist Höhe in $\overline{B'AS_1}$. $h^2 = \lvert B'Z\rvert \cdot \lvert ZA\rvert$ $h^2 = \frac{2}{3}\lvert ZA\rvert^2$ $h = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \lvert ZA\rvert$	Konstruktion von s und S_1, Höhensatz des Euklid, Konstruktion von B'.
	Abtragen von h auf ZA^+, wir erhalten den Schnittpunkt K.	Existenz und Eindeutigkeit des Strecken-abtragens,
	Abtragen von h auf KZ^-, wir erhalten A^*.	Existenz und Eindeutigkeit des Strecken-abtragens,
	$\lvert ZA^*\rvert = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\lvert ZA\rvert$	$h = \sqrt{\frac{2}{3}}\lvert ZA\rvert$

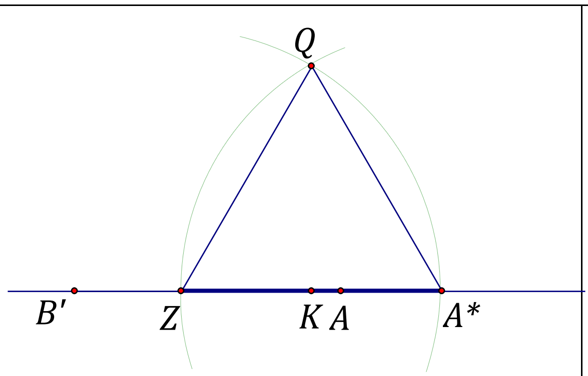
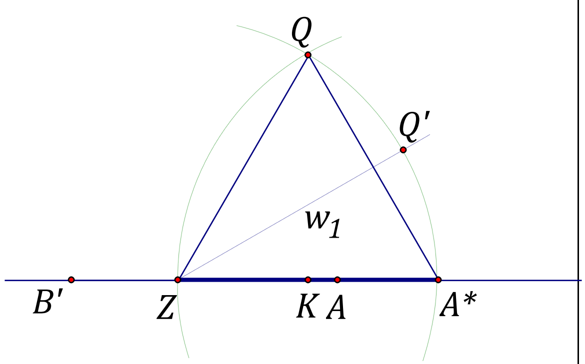
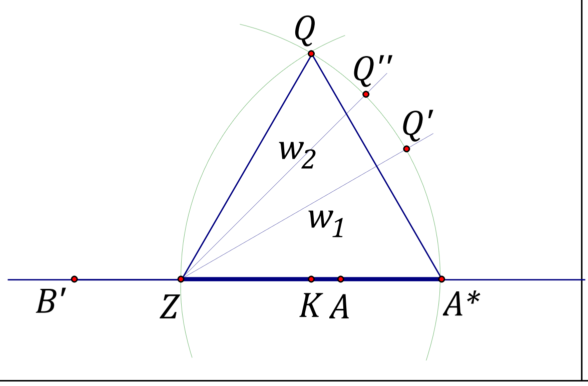
A^* ist das Bild von A bei einer zentrischen Streckung mit dem Streckzentrum Z und dem Streckfaktor $2\sqrt{\frac{2}{3}}$:

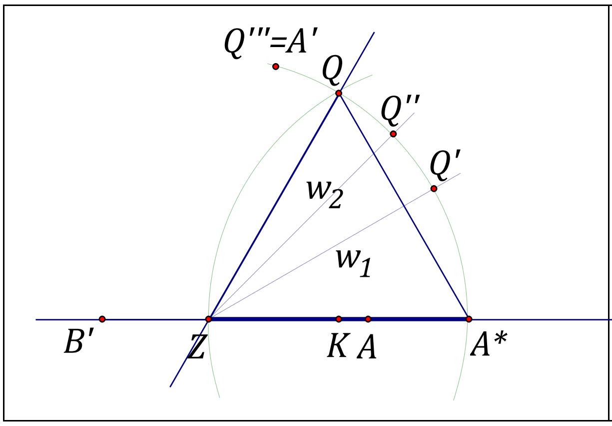
(I) Zw(Z, A, A^*)	$A^* \in ZA^+$ $2\sqrt{\frac{2}{3}}\lvert ZA\rvert > \lvert ZA\rvert$

(II) $\frac{\lvert ZA^*\rvert}{\lvert ZA\rvert} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{\lvert ZA^*\rvert}{\lvert ZA\rvert} = \frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}\lvert ZA\rvert}{\lvert ZA\rvert} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

(B) Drehung

A^* muss jetzt noch um Z mit dem Winkel 75° gedreht werden.

	Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks $\overline{ZA^*Q}$: $\lvert\angle A^*ZQ\rvert = 60°$	Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck,
	Konstruktion der Winkelhalbierenden w_1 des Winkels $\angle A^*ZQ$. Q' sei der Schnittpunkt von w_1 mit dem Kreis um Z und dem Radius $\lvert ZA^*\rvert$ $\lvert\angle Q'ZQ\rvert = 30°$	Existenz und Eindeutigkeit der Winkel-halbierenden, Eigenschaften der Winkel-halbierenden
	Konstruktion der Winkelhalbierenden w_2 des Winkels $\angle Q'ZQ$, Q'' sei der Schnittpunkt von w_2 mit dem Kreis um Z und dem Radius $\lvert ZA^*\rvert$ $\lvert\angle Q''ZQ\rvert = 15°$	Existenz und Eindeutigkeit der Winkel-halbierenden, Eigenschaften der Winkel-halbierenden

	Spiegelung von Q'' an ZQ	Existenz und Eindeutigkeit des Bildpunktes bei einer Geraden-spiegelung.

Wir erhalten Q''', das Bild von Q'' bei der Spiegelung an ZQ. Q''' ist gleichzeitig das gesuchte Bild A' von A^* bei der Drehung um Z mit dem Drehwinkel 75°:

(III) $\quad |A'Z| = |A^*Z|$	$|Q''Z| = |A^*Z|$ (Radien ein und desselben Kreises) $|Q''Z| = |A'Z|$ Abstandserhaltung der Spiegelung, $|A'Z| = |A^*Z|$ (Drittengleichheit)
(IV) $\quad |\angle A^*ZA'| = 75°$	$|\angle A^*ZQ| = 60°$ (gleichseitiges Dreieck) $|\angle Q''ZQ| = 15°$ (Viertelung eines 60° Winkels) $|\angle Q''ZQ| = |\angle QZA'|$ (Winkeltreue der Spiegelung) $|\angle A^*ZA'| = |\angle A^*ZQ| + |\angle QZA'| = 60° + 15° = 75°$ (Winkeladdition)

ZUR BEWERTUNG VON TEILAUFGABE D)

Die obige Lösung wurde sehr ausführlich aufgeschrieben. Die einzelnen Teilschritte lassen sich sinnvollerweise zusammenfassen. Ebenso müssen von den Prüfungskandidaten nicht alle Begründungen derart detailliert ausführen.

Erwartungshorizont:

Lösungs-/Konstruktionsschritt	Begründung	Punkte
resultierender Streckfaktor $2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$		1
resultierender Drehwinkel: 75°		1
Fallunterscheidung: Lage von A bezüglich Z		1
Konstruktion einer Strecke der Länge $\frac{2}{3}|AZ|$: • Generierung der Strahlensatzfigur	 erster Strahlensatz	2
Anwendung des Höhensatzes von Euklid:		
• Generierung der Hypotenuse mit den beiden Hypotenusenabschnitten $|ZA|$ und $\frac{2}{3}|ZA|$ • Generierung eines rechtwinkligen Dreiecks	 Thalessatz	1 2

• Generierung der Höhe h mit $h^2 = \frac{2}{3}\|ZA\|^2$ und damit $$\|h\| = \sqrt{\frac{2}{3}}\|ZA\|$$	Höhensatz des Euklid	2
Konstruktion des Bildpunktes bei der Streckung		1
Konstruktion des Drehwinkels		
• 60°	gleichseitiges Dreieck	
• 30°	Winkelhalbierende	
• 15°	Winkelhalbierende	
• 75°	Winkeladdition	3
Konstruktion des Bildpunktes bei der Drehung	Winkel bereits klar, Nachweis, dass Original und Bild denselben Abstand zu Z haben.	1
	Gesamtpunktzahl:	15

TEILAUFGABE E)

Für die Längen der Strecken $\overline{ZP}, \overline{ZP'}, \overline{ZP''}, \cdots, \overline{ZP''''''''''''}$ gilt:

			Länge
P	nicht	gestrichen	$\sqrt{1}$
P	einmal	gestrichen	$\sqrt{2}$
P	2 mal	gestrichen	$\sqrt{3}$
P	3 mal	gestrichen	$\sqrt{4}$
		…	
P	9 mal	gestrichen	$\sqrt{10}$
P	10 mal	gestrichen	$\sqrt{11}$
P	11 mal	gestrichen	$\sqrt{12}$
P	12 mal	gestrichen	$\sqrt{13}$

Es ist also eine Strecke $\overline{AB}$ der Länge $\sqrt{13}$ zu konstruieren.

Hierzu konstruieren wir ein rechtwinkliges Dreieck $\overline{ABC}$ mit:

$$b = |AC| = 2 \text{ LE}$$

$$a = |BC| = 3 \text{ LE}$$

$$|\angle ACB| = 90°$$

Für die Länge $c = |AB|$ gilt jetzt nach dem Satz des Pythagoras:
$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$ und damit $c = \sqrt{13}$.

Erkenntnis, dass $\sqrt{13}$ zu konstruieren ist	1 Punkt
Konstruktion des Dreiecks	2 Punkte
Begründung	2 Punkte
gesamt	5 Punkte

Bewertungsmaßstab:

Punktzahlen:

Aufgabe a)	8
Aufgabe b)	2
Aufgabe c)	6
Aufgabe d)	15
Aufgabe e)	5
gesamt:	31

60% von 31 18,6

Benotung

Punkte	Note
31	1
30	1
29	1,5
28	1,5
27	2
26	2
25	2,5
24	2,5
23	3
22	3
21	3,5
20	3,5
19	4
18	4
17	4,5
16	4,5
15	4,5
14	4,5
13	5
12	5
11	5
10	5
9	5
8	5,5
7	5,5
6	5,5
5	5,5
4	6
3	6
2	6
1	6
0	6