Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 8

(Lösungen)

1. Definieren Sie, was man unter einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M versteht. (Bezüglich der Definition wollen wir davon ausgehen, dass wir Geometrie im Raum betreiben.)

Es sei M ein Punkt der Ebene E. Ein Kreis k, ist die Menge aller Punkte P der Ebene E, die vom Punkt M denselben Abstand haben. Der Punkt M heißt Mittelpunkt des Kreises k.

2. Beweisen Sie folgenden Satz auf Grundlage der Inzidenzaxiome für den Raum (I/0–I/7):
   Es existieren (mindestens) 6 paarweise verschiedene Geraden.

Beweis:

- Nach I/7 gibt es vier Punkte A, B, C und D, die nicht komplanar sind.
- Es gibt also 6 Paare verschiedener Punkte und nach I/1 wird dadurch jeweils eine Gerade bestimmt: AB, AC, AD, BC, BD, CD.
- Es bleibt zu zeigen, dass die Geraden AB, AC, AD, BC, BD und CD paarweise verschieden sind. Wir beweisen $AB \neq AC$.
- Indirekter Beweis:
  - Wäre $AB = AC$, so würde C der Geraden AB angehören.
  - Die Punkte A, B und D sind nicht kollinear, denn würden A, B und D auf einer gemeinsamen Geraden liegen, so lägen sogar alle vier Punkte A, B, C und D auf dieser Geraden (weil nach Annahme $AB = AC$). Unter Hinzuziehung eines Punktes E, der nicht auf AB liegt (existiert nach I/3) wäre damit klar, dass A, B, C, D in einer Ebene liegen, was der Einführung dieser Punkte unter Berufung auf I/7 widerspricht.
  - Durch A, B und D wird nach I/4 eine Ebene ABD bestimmt.
  - Wegen I/5 und wegen $C \in AB$ gehört C zur Ebene $ABD \Rightarrow A$, B, C und D liegen in einer Ebene $\Rightarrow$ Widerspruch zur Einführung dieser Punkte mit I/8.
- Also ist $AB \neq AC$. Analog lässt sich zeigen $AB \neq AD$, $AB \neq BC$ usw.
  Es gibt also 6 paarweise verschiedene Geraden.

3. Beweisen Sie: Ist O ein beliebiger Punkt einer Geraden g und A ein weiterer (von O verschiedener) Punkt dieser Geraden, so gilt für die Halbgeraden OA^+ und OA^-:
   a) $OA^+ \cap OA^- = \{O\}$ und b) $OA^+ \cup OA^- = g$.

BEWEIS:

a) Nach Definition ist $OA^+ := \{P \mid \mathrm{Zw}(O, A, P) \vee \mathrm{Zw}(O, P, A)\} \cup \{O, A\}$ und
$OA^- := \{P \mid \mathrm{Zw}(P, O, A)\} \cup \{O\}$.

Damit ist offensichtlich, dass O der Schnittmenge $OA^+ \cap OA^-$ angehört und es bleibt zu zeigen, dass dies für keinen von O verschiedenen Punkt zutrifft.

Indirekter Beweis: Wir nehmen an, ein Punkt $P \neq O$ möge sowohl zu OA^+ als auch zu OA^- gehören. Dann gilt:

$\left(\mathrm{Zw}(OAP) \text{ oder } \mathrm{Zw}(OPA) \text{ oder } P = A\right)$ und $\mathrm{Zw}(POA)$.

Von drei Punkten kann nur einer zwischen den beiden anderen liegen, was unsere Annahme für den Fall $P \neq A$ sofort zum Widerspruch führt:

weder $\mathrm{Zw}(OAP)$ und $\mathrm{Zw}(POA)$ ist gleichzeitig möglich, noch $\mathrm{Zw}(OPA)$ und $\mathrm{Zw}(POA)$.

Da für $O \neq A$ nach Definition der Zwischenrelation nicht $\mathrm{Zw}(AOA)$ gelten kann, gehört der Punkt A nicht zu OA^-.

Es gibt also außer O keinen Punkt $P \in OA^+ \cap OA^-$ – die Behauptung a) ist somit bewiesen.

b) Es sei Q ein beliebiger (von O verschiedener) Punkt der Geraden g.

Nach Folgerung 3 liegt von den Punkten O, A und Q einer zwischen den beiden anderen oder Q ist mit A identisch.

In beiden Fällen gehört Q definitionsgemäß einer der beiden Halbgeraden OA^+ und OA^- und somit der Vereinigungsmenge $OA^+ \cup OA^-$ an.

Da Q beliebig gewählt war, ist damit auch die Behauptung b) gezeigt.