Übungsaufgaben Einführung in die Geometrie, mathematische Grundlagen II, Serie 7 SoSe 2013

Gieding

10.06.2013 - 16.06.2013

Aufgabe 7.01

In der Übung vom 07.06. (14 bis 16 Uhr) definierte eine Kommilitonin den Begriff Halbgerade AB^+ wie folgt:

Definition Ü:
Halbgerade AB^+
$AB^+ := \overline{AB} \cup \{P | P \in AB \wedge |AP| > |BP|\}$

Wir hatten in der Vorlesung definiert:

Definition V:
Halbgerade AB^+
$AB^+ := \overline{AB} \cup \{P | \operatorname{Zw}(A, B, P)\}$

Beweisen Sie:

a) Definition V $\Rightarrow$ Definition Ü

b) Definition Ü $\Rightarrow$ Definition V

Lösung von Aufgabe 7.01 S SoSe 13

a) Der Teil mit der Strecke $\overline{AB}$ ist trivial. Bleibt:
Voraussetzung 1: $P \in AB$
Voraussetzung 2: $|AP| > |BP|$
Behauptung: $\operatorname{Zw}(A, B, P)$
Annahme: $\neg \operatorname{Zw}(A, B, P)$
Beweis:
Wir können davon ausgehen, dass A, B und P drei paarweise verschiedene

Punkte sind: A und B sind es sowieso (Halbgerade) und sollte $P \equiv A$ oder $P \equiv B$ sein, dann würde P zu $\overline{AB}$ gehören und trivialerweise zu AB^+ entsprechend Definition V gehören.
Nach Voraussetzung 1 sind die drei paarweise verschiedenen Punkte A, B, P kollinear.
Nach Satz ... liegt von drei paarweise verschiedenen Punkten genau einer zwischen den beiden anderen. Nach unserer Annahme liegt B nicht zwischen A und P. Es können demnach noch die beiden folgenden Fälle eintreten:

1. Fall: $\mathrm{Zw}(P, A, B)$
2. Fall: $\mathrm{Zw}(A, P, B)$

Beweis für Fall 1:

(I) $|PA| + |AB| = |PB|$ ($\mathrm{Zw}(P, A, B)$)

(II) $|PA| \leq |PB|$ (Folgt aus (I), den Rechenregeln der Addition in $\mathbb{R}$ und daraus, dass nach dem Abstandsaxiom die Abstände zwischen zwei Punkten nicht negativ sind.

(III) $|PA| \leq |PB|$ ist jedoch ein Widerspruch zur Voraussetzung 2: $|AP| > |BP|$.

Beweis für Fall 2:
In diesem Fall gehört P zur Strecke $\overline{AB}$ und gehört damit trivialerweise zur Halbgeraden AB^+ entsprechend Definition V.

b) Der Teil mit der Strecke $\overline{AB}$ ist wieder trivial. Bleibt:
Voraussetzung: $\mathrm{Zw}(A, B, P)$
Behauptung 1: $P \in AB$
Behauptung 2: $|AP| > |BP|$
Beweis:

(I) $P \in AB$ ist erfüllt, da die drei Punkte wegen $\mathrm{Zw}(A, B, P)$ kollinear sind.

(II) Aus $\mathrm{Zw}(A, B, P)$ folgt $|AB| + |BP| = |AP|$. (Anwendung der Definition *Zwischen* auf die Voraussetzung.)

(III) Unsere drei Punkte sind paarweise verschieden (falls nicht $\overline{AB}$) und nach dem Abstandaxiom die betrachteten Abstände postive reelle Zahlen sind, folgt aus $|AB| + |BP| = |AP|$ unmittelbar $|AP| > |BP|$.

Aufgabe 7.02

Luca aus der 5b erklärt Ihnen: Die Hälfte von einer Ebene ist eine Halbebene. Warum ist diese Begriffserklärung von Luca nicht korrekt?

Lösung von Aufgabe 7.02 S SoSe 13

Nehmen Sie zwei *Viertelebenen*, die nur einen Punkt gemeinsam haben.

Aufgabe 7.03

Es sei ε eine Ebene und A ein Punkt außerhalb von ε.
Definieren Sie Halbraum εA^{+} und Halbraum εA^{-}.

Lösung von Aufgabe 7.03 S SoSe 13

$\varepsilon A^{+} := \left\{P | \overline{PA} \cap \varepsilon = \emptyset\right\} \cup \varepsilon$
$\varepsilon A^{-} := \left\{P | \overline{PA} \cap \varepsilon \neq \emptyset\right\}$

Aufgabe 7.04

Begründen Sie:
Auf jedem Strahl existiert genau ein Punkt Z, der zu dem Anfangspunkt des Strahls den Abstand $\frac{\pi}{3}$ hat.

Lösung von Aufgabe 7.04 S SoSe 13

$\frac{\pi}{3}$ ist eine positive reele Zahl. Die Aussage folgt unmittelbar aus dem Axiom vom Lineal.

Aufgabe 7.05

Es seien A und B zwei verschiedene Punkte. Welche Ergebnisse erzielen Sie nach den folgenden Mengenoperationen?

a) $AB^{+} \cap BA^{+} =$

b) $AB^{-} \cap BA^{-} =$

c) AB geschnitten mit dem Kreis um A durch $B =$

d) $AB \cap BA =$

Lösung von Aufgabe 7.05 S SoSe 13

a) $AB^+ \cap BA^+ = \overline{AB}$

b) $AB^- \cap BA^- = \emptyset$

c) AB geschnitten mit dem Kreis um A durch $B = \{B, B^*\}$
mit $|AB^*| = |AB| \wedge B^* \in AB^-$.

d) $AB \cap BA = AB = BA$

Aufgabe 7.06

Beweisen Sie, dass keine Strecke existiert, die zwei Mittelpunkte hat.

Lösung von Aufgabe 7.06 S SoSe 13

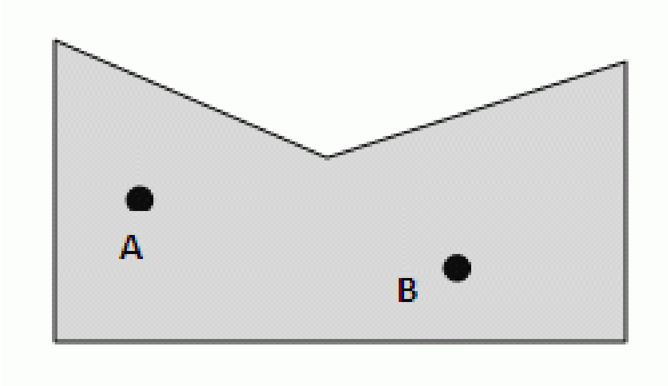
Annahme: $\overline{AB}$ hat zwei Mittelpunkte M_1 und M_2.
Beide Punkte gehören entsprechend der *Definition Mittelpunkt einer Strecke* zur Strecke $\overline{AB}$ und somit (s. Definition Halbgerade) zur Halbgeraden AB^+.
Weil beide Punkte Mittelpunkte sind gilt:

$$|AM_1| + |M_1B| = |AB| \tag{1}$$
$$|AM_2| + |M_2B| = |AB| \tag{2}$$
$$|AM_1| + |M_1B| = |AM_2| + |M_2B| \tag{3}$$
$$2|AM_1| = 2|AM_2| \tag{4}$$
$$|AM_1| = |AM_2| \tag{5}$$

Aus dem Axiom vom Lineal folgt unmittelbar aus Gleichung 5: $M_1 \equiv M_2$.

Aufgabe 7.07

Eine Menge M von Punkten heißt konvex, wenn gilt: $\forall A, B \in M : \overline{AB} \subseteq M$



Student XY argumentiert: "Weil $\overline{AB}$ komplett innerhalb der Punktmenge liegt, ist die obige Figur konvex."
Wo liegt XYs Denkfehler?

Lösung von Aufgabe 7.07 S SoSe 13

Die Definition fordert $\forall A, B \in M : \overline{AB} \subseteq M$ und nicht $\exists A, B \in M : \overline{AB} \subseteq M$

Aufgabe 7.08

Definieren Sie den Begriff Halbkreis. (Kreis sei definiert.)

Lösung von Aufgabe 7.08 S SoSe 13

Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Ferner seien g ein Gerade, die durch M geht und A ein Punkt des Kreises k, der nicht zu g gehört. Unter Halbkreisen versteht man die beiden folgenden Schnittmengen $gA^+ \cap k$ bzw. $gA^- \cap k$.

Aufgabe 7.09

Definieren Sie den Begriff Dreieck.
Hinweis: Unter einem Dreieck versteht man seine Seiten.

Lösung von Aufgabe 7.09 S SoSe 13

Es seien A, B, C drei nichtkollineare Punkte. $\overline{ABC} := \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$.

Aufgabe 7.10

Definieren Sie den Begriff Viereck.
Hinweis: Vereinigungsmenge der Seiten

Lösung von Aufgabe 7.10 S SoSe 13

Es seien A, B, C, D vier koplanare Punkte, von denen je drei nichtkollinear sind.
$\overline{ABCD} := \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$.