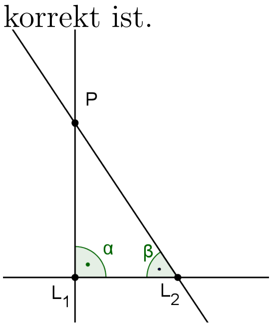
Aufgabe 1: Definieren

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
a)	Definieren Sie den Begriff *Kreis*. `Ein Kreis ist die Menge aller Punkte einer Ebene` ε`, die zu einem gegeben Punkt` M `von` ε `ein und denselben Abstand haben.`	2	
b)	Jeder Kreis hat unendlich viele Durchmesser. Definieren Sie den Begriff *Durchmesser* eines Kreises k mit Mittelpunkt M. `Es sei` k `ein Kreis mit dem Mittelpunkt` M`.` A `und` B `seien zwei Punkte von` k`. Wenn` $M \in \overline{AB}$ `dann ist` $\overline{AB}$ `ein Durchmesser von` k`.`	2	
c)	Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Ⓡ $:= \{\overline{PM} \mid P \in k\}$. Erläutern Sie die Menge Ⓡ. Ⓡ `ist die Menge aller Radien von` k	2	
d)	Ergänzen Sie: Definition: (Viertelkreis) Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Ferner seien A und B zwei Punkte von k mit $AM \perp BM$. Die folgende Menge V_k ist ein Viertelkreis: $V_k := \{P \mid P \in k \wedge P \in AM, B^+ \cap BM, A^+\}$.	2	
e)	Ebene Geometrie: Zwei Kreise sollen genau dann in der *Relation* „$\odot$“ zueinander stehen, wenn sie *gemeinsame Punkte* haben. In der folgenden Definition dieser Relation darf die Idee, gemeinsame Punkte zu haben, **nicht** verwendet werden. Ergänzen Sie: Es seien k_1 und k_2 zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 bzw. r_2. $k_1 \odot k_2 :\Leftrightarrow r_1 + r_2 \leq \lvert M_1M_2 \rvert \geq \lvert r_1 - r_2 \rvert$	3	
f)	Definieren Sie den Begriff *gleichschenkliges Trapez* unter Verwendung des Begriffes Kreis. `Ein Trapez mit einem Umkreis ist ein gleichschenkliges Trapez.`	2	
g)	Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit den Seitenmittelpunkten M_a, M_b, M_c. Die Schwerelinien des Dreiecks $\overline{ABC}$ sind die Geraden AM_a, BM_b und CM_c. Welche Begriffsbezeichnung verwendet man in der Schule anstelle von Schwerelinie? `Seitenhalbierende`	1	
h)	Mark versucht, den Begriff *Sehnendreieck* zu definieren. Kommentieren Sie Marks Unterfangen. `Jedes Dreieck hat einen Umkreis und ist damit ein Sehnendreieck. Damit ist es sinnlos, den Begriff zu definieren.`	2	

Aufgabe 2: Argumentieren, Begründen

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
a)	Begründen Sie mit einem einzigen Stichwort, warum die folgende Aussage keine wahre Aussage ist: *Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben.* `Identität` oder `windschief` sind richtige Antworten.	1	
b)	Unter der Menge aller Punkte wollen wir den $\mathbb{R}^2$ verstehen. Ein Punkt P ist damit ein geordnetes Paar reeller Zahlen (x_p, y_p). Den Abstand zweier Punkte $A\,(x_a, y_a)$ und $B\,(x_b, y_b)$ definiert man als $\lvert AB\rvert := \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$. Begründen Sie $\operatorname{Zw}(P, Q, R)$ für $P(1,1), Q(2,2), R(3,3)$ wenn unsere übliche Definition für die Zwischenrelation angewendet wird. $\lvert PQ\rvert = \sqrt{2}, \lvert QR\rvert = \sqrt{2}, \lvert PR\rvert = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2\sqrt{2}$ $\lvert PQ\rvert + \lvert QR\rvert = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = \lvert PR\rvert \Rightarrow \operatorname{Zw}(PQR)$	4	
c)	Gegeben sei ein Dreieck $\overline{ABC}$ mit den schulüblichen Bezeichnungen. Der Punkt M_a sei der Mittelpunkt der Seite a. Welches Axiom brauchen Sie für eine Begründung, dass $\lvert\alpha\rvert = \lvert\angle BAM_a\rvert + \lvert\angle M_aAC\rvert$ gilt? `Winkeladditionsaxiom`	1	
d)	Begründen Sie nur mit Mitteln der absoluten Geometrie, dass Abb. 1 nicht korrekt ist.  Abb. 1 `Nach einem Korollar aus dem schwachen Außenwinkelsatz sind in jedem Dreieck zwei Innenwinkel spitz. Im Dreieck` $\overline{PL_1L_2}$ `könnte nur` $\angle L_1PL_2$ `spitz sein.`	2	
e)	Begründen Sie mit Mitteln, die Ihnen nicht in der absoluten Geometrie zur Verfügung stehen, dass Abbildung 1 nicht korrekt ist. `Widerspruch zum Innenwinkelsatz: Die Winkelsumme ist mit zwei Winkeln bereits erreicht.`	2	
f)	Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit $\overline{AB} \ncong \overline{BC} \ncong \overline{CA} \ncong \overline{AB}$. m_c sei die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$. Begründen Sie stichwortartig in genau zwei Schritten, dass entweder $m_c \cap \overline{BC} \setminus \{A, B\} \neq \emptyset$ oder $m_c \cap \overline{AC} \setminus \{A, C\} \neq \emptyset$. (1) `Die Mittelsenkrechte` m_c `geht nicht durch den Punkt` C`, da ansonsten das Dreieck` $\overline{ABC}$ `gleichschenklig wäre.` (2) `Da` m_c `als Mittelsenkrechte bereits` $\overline{AB}$ `innerhalb schneidet und` m_c `nach (1) nicht durch` C `geht, muss` m_c `jetzt nach dem Axiom von Pasch entweder` $\overline{AC}$ `oder` $\overline{BC}$ `innerhalb schneiden.`	4	

Aufgabe 3: Kriterien

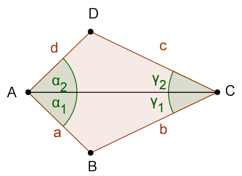
<table>
<tr><th>Nr.</th><th>Aufgabe</th><th>Punkte.</th><th></th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Ein Tangentenviereck ist genau das, was der Name vermuten lässt. Definieren Sie den Begriff Tangentenviereck.
<code>Wenn die Seiten eines Vierecks auf Tangenten an ein und denselben Kreis liegen, dann ist das Viereck ein Tangentenviereck.</code></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Definition D: Ein Drachen ist ein Viereck mit zwei Paaren jeweils zueinander kongruenter benachbarter Seiten.
Vereinbarung: Im Folgenden verwenden wir schulübliche Bezeichnungen für die Innenwinkel eines Vierecks.
Satz W1: Wenn $\overline{ABCD}$ ein konvexer Drachen mit $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ ist, dann sind die Strahlen AC^+ und CA^+ die Winkelhalbierenden von α bzw γ
Beweisen Sie Satz W1. (Hinweis: beziehen Sie sich hier und in Teilaufgabe c) auf die Skizzen.)
Voraussetzung: $a \cong d$
Behauptung: $\alpha_1 \cong \alpha_2, \gamma_1 \cong \gamma_2$


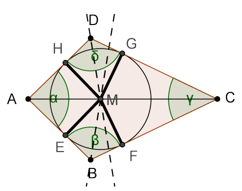
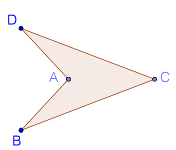
Abb. 2
<table>
<tr><th>Nr.</th><th>Beweisschritt</th><th>Begründung</th></tr>
<tr><td>(I)</td><td>$\overline{AC} \cong \overline{AC}$</td><td>trivial</td></tr>
<tr><td>(II)</td><td>$a \cong d$</td><td>Voraussetzung</td></tr>
<tr><td>(III)</td><td>$\overline{ABCD}$ ist Drachen</td><td>Voraussetzung</td></tr>
<tr><td>(IV)</td><td>$b \cong c$</td><td>(III), (II)</td></tr>
<tr><td>(V)</td><td>$\overline{ABC} \cong \overline{ADC}$</td><td>(I), (II), (IV), SSS</td></tr>
<tr><td>(VI)</td><td>$\alpha_1 \cong \alpha_2$</td><td>(V)</td></tr>
<tr><td>(VII)</td><td>$\gamma_1 \cong \gamma_2$</td><td>(V)</td></tr>
</table></td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Satz W2: Wenn $\overline{ABCD}$ ein konvexer Drachen mit $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ ist, dann haben die Winkelhalbierenden von $\overline{ABCD}$ einen Punkt M gemeinsam.
Beweisen Sie Satz W2. (Dass sich je zwei Winkelhalbierende schneiden, brauchen sie nicht zu zeigen.)


Abb. 3
<table>
<tr><td></td><td>M sei Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von δ mit $\overline{AC}$
$\overline{ME}, \overline{MF}, \overline{MG}, \overline{MH}$ seien die Lote von M auf die Seiten von $\overline{ABCD}$</td><td>Hilfskonstruktionen vorab.</td></tr>
<tr><td>(i)</td><td>$\overline{MH} \cong \overline{MG}$</td><td>$DM^+$ ist Wh von δ</td></tr>
<tr><td>(ii)</td><td>$\overline{MG} \cong \overline{MF}$</td><td>$CM^+$ist Wh von γ</td></tr>
<tr><td>(iii)</td><td>$\overline{MH} \cong \overline{ME}$</td><td>$AM^+$ist Wh von α</td></tr>
<tr><td>(iv)</td><td>$\overline{ME} \cong \overline{MF}$</td><td>(i), (ii), (iii)</td></tr>
<tr><td>(v)</td><td>$M \in w_\beta$ (wh von β)</td><td>(iv)</td></tr>
</table></td><td>11</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Konvexe Drachen sind also Tangentenvierecke. Für jeden Drachen gilt: (*) Die Summe der Längen der gegenüberliegenden Seiten ist gleich. Skizzieren Sie ein Gegenbeispiel, welches zeigt, dass (*) kein Tangentenviereckskriterium sein kann.

</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

Aufgabe 4: Beweisen wie die Schüler

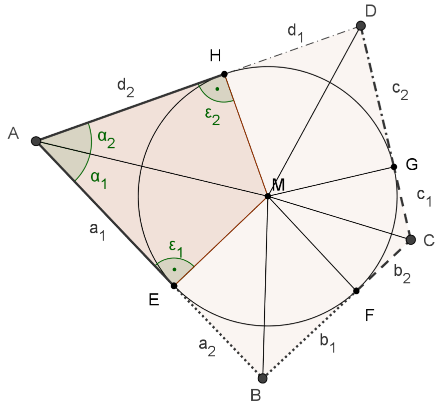


Abb. 4

a) *Es sei $\overline{ABCD}$ ein Tangentenviereck entsprechend Abb. 4. Die Punkte E, F, G, H seien die Berührungspunkte der Tangenten an den Inkreis. Beweise, dass $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$ gilt.*
Ergänzen Sie das folgende Beweisfragment:

Nr.	Beweisschritt	Begründung	Punkte	
(I)	$\overline{EM} \cong \overline{HM}$	Radien ein und desselben Kreises	1	
(II)	$\|\varepsilon_1\| = \|\varepsilon_2\| = 90°$	AB u. AD sind Tangenten, Tangentenkriterium	1	
(III)	AM^+ ist Winkelhalbierende von $\angle DAB$	(II), (I), Winkelhabierendenkriterium	1	
(IV)	$\alpha_1 \cong \alpha_2$	(III)	1	
(V)	$\overline{AM} \cong \overline{AM}$	trivial	1	
(VI)	$\|AM\| > \|EM\|$, $\|AM\| > \|HM\|$	(II) und Seiten- Winkelbeziehung im Dreieck	1	
(VII)	$\overline{AEM} \cong \overline{AHM}$	(I), (II), (V), (VI), SsW	1	
(VIII)	$a_1 \cong d_2$	(VII)	1	
(IX)	$a_2 \cong b_1 \wedge b_2 \cong c_1 \wedge c_2 \cong d_1$	analog	0	
(X)	$\|AB\| + \|CD\| =$ $a_1 + a_2 + c_1 + c_2 =$ $d_2 + b_1 + b_2 + d_1 =$ $\|BC\| + \|DA\| =$	(VIII), (IX)	2	

b) Formulieren Sie den unter a) bewiesenen Satz in allgemeinerer Form:

Wenn ein Viereck ein Tangentenviereck ist, dann ist die Summe der Längen seiner einander gegenüberliegenden Seiten gleich.	1	