

Aufgaben zu Sätzen und Beweisen Teil 1

Aufgabe 2.1

Der Begriff Parallelogramm sei als Viereck mit zwei Paaren paralleler Seiten definiert. Wir betrachten die folgende Implikation (I):

- (I) Wenn sich in einem Viereck die Diagonalen halbieren, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.
- (a) Nennen Sie die Voraussetzung und die Behauptung der Implikation (I).
 - (b) Bilden Sie die Umkehrung der Implikation (I).
 - (c) Bilden Sie die Kontraposition der Implikation (I).
 - (d) Beweisen Sie (I) mit den aus der Schule bekannten Sätzen.
 - (e) Beweisen Sie die Umkehrung der Implikation (I) mit den aus der Schule bekannten Sätzen.
 - (f) Definieren Sie den Begriff "Parallelogramm" neu.

Aufgabe 2.2

Der Satz des Pythagoras lautet:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate der Kathetenlängen gleich dem Quadrat der Länge der Hypotenuse.

- (a) Formulieren Sie den Satz des Pythagoras in Wenn-Dann.
- (b) Formulieren Sie die Umkehrung des Satzes von Pythagoras.
- (c) Formulieren Sie die Kontraposition des Satzes von Pythagoras.
- (d) Auch die Umkehrung des Satzes von Pythagoras ist wahr. Formulieren Sie ein Kriterium dafür, dass ein Dreieck rechtwinklig ist.
- (e) Definieren Sie den Begriff des rechtwinkligen Dreiecks mittels des Kriteriums aus Teilaufgabe (d).

Aufgabe 2.3

Es gibt wahre Implikationen, deren Umkehrung nicht wahr ist. Formulieren Sie eine solche.

Beispiel:

Es seien a, b, t natürliche Zahlen.

Es gilt:

$$t|a \wedge t|b \Rightarrow t|(a + b)$$

Es gilt nicht:

$$t|(a + b) \Rightarrow t|a \wedge t|b$$

Aufgabe 2.4

Frau Schultze-Kröttendörfer hat mit ihrer 9a den Satz des Pythagoras behandelt. In der folgenden Stunde möchte sie überprüfen, ob die Schüler der 9a die Aussage des Satzes wirklich verstanden haben. Hierzu lässt sie die Schüler u.a. die folgende Aufgabe bearbeiten: — ”Rechtwinklig oder nicht?”

Gegeben seien Dreiecke mit den folgenden Seitenlängen:

Seitenlängen	Dreieck 1	Dreieck 2	Dreieck 3	Dreieck 4	Dreieck 5
a	3 cm	2 cm	5 cm	4,5 cm	5 cm
b	4 cm	3,61 cm	2 cm	4,5 cm	12 cm
c	5 cm	3 cm	4 cm	5 cm	13 cm

Welche dieser Dreiecke sind mit Sicherheit nicht rechtwinklig? Begründe deine Entscheidungen.

- (a) Kommentieren Sie diese Schüleraufgabe aus fachmathematischer Sicht unter Verwendung der Begriffe Implikation und Kontraposition.
- (b) Wir unterstellen, dass die Schüler der 9a bis dato nur den Satz des Pythagoras kennen. Wegen zu vieler unbezahlter Vertretungsstunden ist Frau Schultze-Kröttendörfer überlastet. Infolge dieser Überlastung ist Frau Schultze-Kröttendörfer beim Entwurf der Frage zur obigen Aufgabe unkonzentriert und formuliert diese wie folgt:
Nenne alle Dreiecke der obigen Tabelle, die rechtwinklig sind. Begründe deine Entscheidungen. Begründen Sie, warum die Schüler die Aufgabe jetzt nicht lösen könnten. Verwenden Sie in Ihrer Begründung den Begriff des Kriteriums.

Aufgabe 2.5

Der Satz des Pythagoras sei bewiesen. Es sei \overline{ABC} ein Dreieck mit den schulüblichen Bezeichnungen:

- Dem Punkt A liegt die Seite a gegenüber, dem Punkt B die Seite b und dem Punkt C die Seite c .
- $\alpha = \angle CAB, \beta = \angle ABC, \gamma = \angle ACB$.

Wir gehen davon aus, dass \overline{ABC} rechtwinklig ist, wobei γ der rechte Winkel ist. $h = \overline{CL}$ sei das Lot von C auf c . Der Fußpunkt L des Lotes von C auf c teilt die Hypotenuse c in die beiden Abschnitte $q = \overline{AL}$ und $p = \overline{LB}$.

Beweisen Sie den Höhensatz von Euklid:

$$h^2 = p \cdot q$$