Physik Klasse 11

Dr. Michael Gieding

Schuljahr 2023/24

1 Kinematik

1.1 Die geradlinig gleichförmige Bewegung

1.1.1 Was versteht man unter der geradlinig gleichförmigen Bewegung?

Ein Körper bewegt sich geradlinig gleichförmig, wenn

- er sich auf einer Geraden bewegt und
- der vom Körper zurück gelegte Weg s und die dafür benötigte Zeit t proportional zueinander sind.

Es gilt also:

- in gleichen Zeiten legt der Körper gleiche Wege zurück.
- für den doppelten Weg braucht der Körper die doppelte Zeit.
- für den halben Weg braucht der Körper nur die halbe Zeit.
- der Quotient aus zugehörigen Weg- und Zeit-Werten ist immer gleich.

Die Geschwindigkeit v des Körpers ist der Proportionalitätsfaktor der Weg-Zeit-Proportionalität. Die Geschwindigkeit v berechnet sich also entsprechend der folgenden Formel:

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{t}}$$

Die Einheit der Geschwindigkeit v ist eine zusammengesetze bzw. abgeleitete Einheit. Sie setzt sich aus den Einheiten der Grundgrößen Weg (s, m) und Zeit (t, s) zusammen. Die Einheit der Geschwindigkeit ist also:

$$[v] = 1\frac{[\mathrm{s}]}{[\mathrm{t}]} = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

[1] Im täglichen Gebrauch verwendet man insbesondere bei Autofahrten für die Geschwindigkeit die Einheit $[v] = 1\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

[1]Um zu kennzeichnen, dass die Einheit einer physikalischen Größe gemeint ist, setzt der Physiker das formelzeichen der jeweiligen Größe in eckige Klammern.

1.1.2 Kontrollfragen und -aufgaben zur Idee der geradlinig gleichförmigen Bewegung

Aufgabe 1.1.1

Wertetabellen
Drei Körper K_1, K_2 und K_3 bewegten sich geradlinig gleichförmig. Der Bewegungsablauf wurde in Wertetabellen dokumentiert. Leider sind einige Werte verloren gegangen. Ergänze die fehlenden Werte:

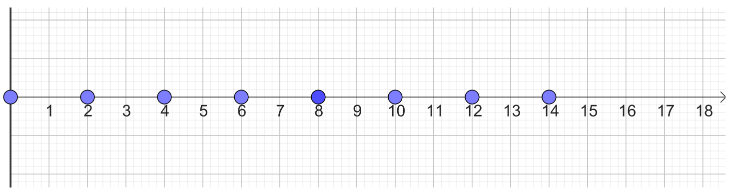
K_1		K_2		K_3	
t in s	s in m	t in s	s in m	t in s	s in m
3,5		123	369	1024	13
5	7,5	136		1032	
4,5	6,75	149	447	1040	13,203125
	9	162	486	1048	13,3046875
4,5	6,75	175		1056	13,40625
6		188	564	1064	13,5078125
5,5	8,25	201	603		13,609375
7,1		214	642		14
5,5	8,25	227	681	1088	13,8125

Berechne die Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 der drei Körper.

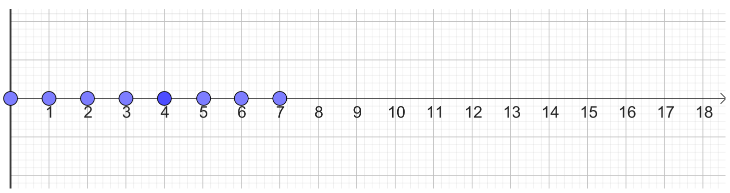
Aufgabe 1.1.2

Stroboskop
Die geradlinige Bewegung von drei Körpern K_1, K_2 und K_3 wurde mittels eines Stroboskops und eines Fotoapparates aufgezeichnet. Die Körper bewegten sich in einem völlig dunklen Raum. Alle 0,5s erfolgte durch das Stroboskop ein Blitz und die jeweilige Position des Körpers wurde im Foto verewigt. Dabei ergaben sich folgende Bilder:

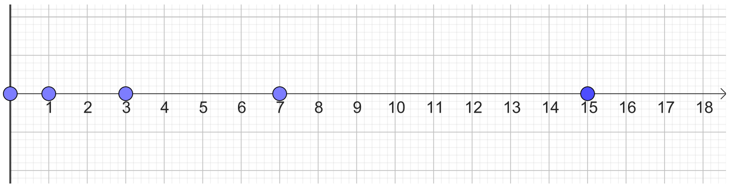
K_1



K_2



K_3



a) In welchem Fall handelt es sich um keine gleichförmige Bewegung?

b) Berechne für die anderen Fälle die jeweilige Geschwindigkeit.

c) Welchen Weg hätten die drei körper jeweils nach 100 Sekunden zurück gelegt?

Aufgabe 1.1.3

Durchschnittsgeschwindigkeit
Außer der Ausbreitung der Sonnenstrahlen findet man im täglichen Leben kaum Bewegungsvorgänge, die exakte der Definition einer geradlinig gleichförmigen Bewegung entsprechen. Trotzdem verwendet man für viele Bewegungsvorgänge die Formel v0$\frac{s}{t}$*. Man berechnet dann die Geschwindigkeit mit der das Fahrzeug gefahren wäre wenn es sich mit konstanter Geschwindigkeit gefahren wäre. Letztlich berechnet man damit die Durchschnittsgeschwindigkeit.*
Die Entfernung von Gaiberg zur Monte Sole Schule in Heilbronn beträgt 54 km. Am Montag Morgen braucht man in der Regel mit dem Auto 65 min für diese Strecke. Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit des Fahrzeugs.

Aufgabe 1.1.4

Umrechnung
Rechne die folgenden Geschwindigkeiten in die jeweils angegeben Einheiten um:

a) $330\frac{km}{h} = \ldots \frac{m}{s}$

b) $120\frac{m}{s} = \ldots \frac{km}{h}$

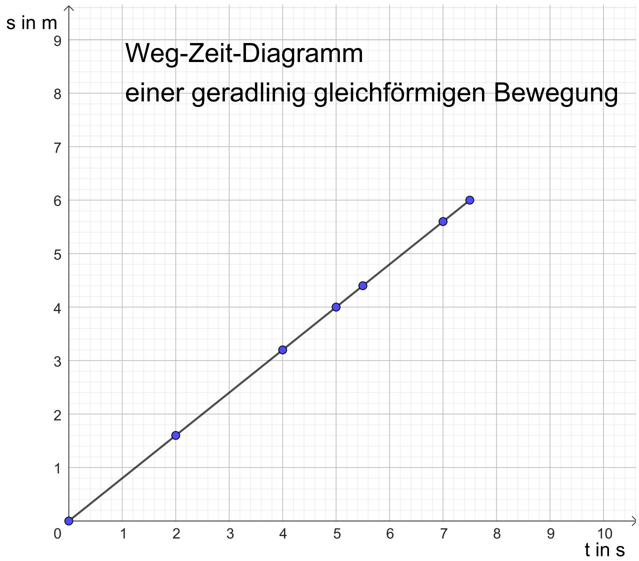
c) $300.000\frac{km}{s} = \ldots \frac{km}{h}$

1.1.3 Das Weg-Zeit-Diagramm der geradlinig gleichförmigen Bewegung

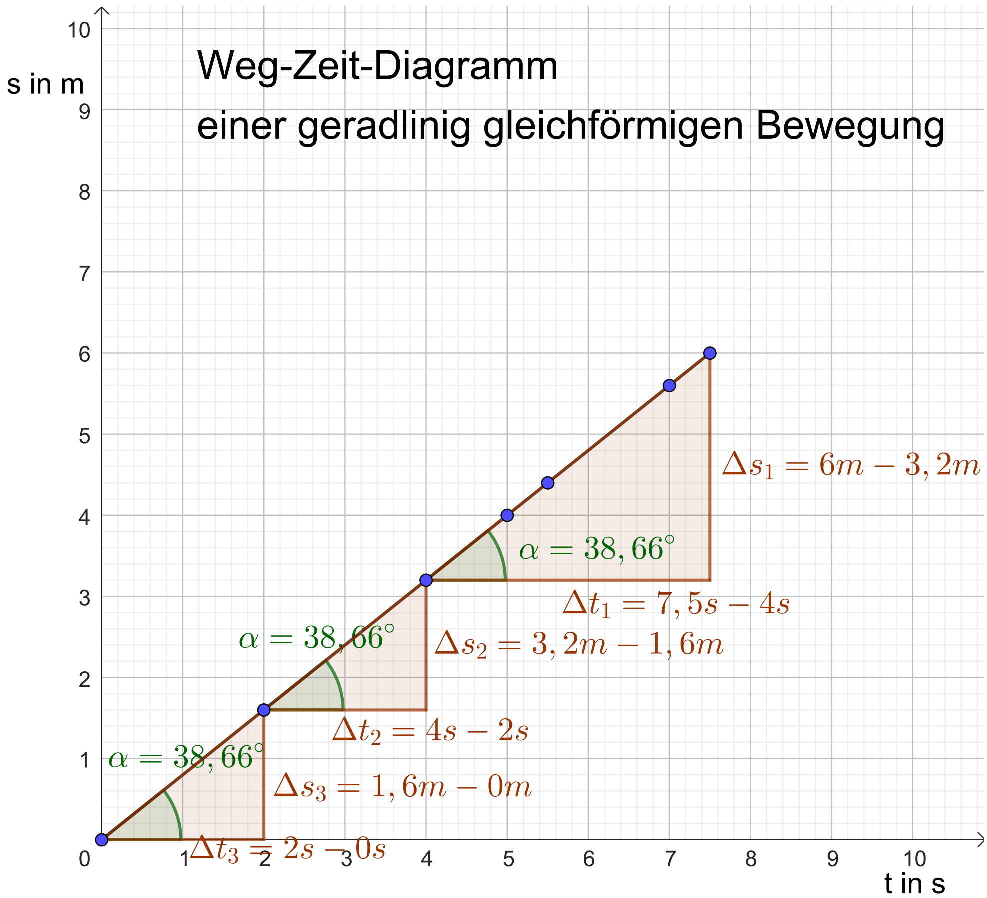
„Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte.“

Letztlich sind poroportionale Zuordnungen Funktionen. Man sagt, der Weg ist ein Funktion der Zeit. Funktionen lassen sich in Koordinatensystemen grafisch veranschaulichen. Bezüglich des Zusammenhanges zwischen Weg und Zeit bei einer Bewegung sprechen wir vom sogenannten Weg-Zeit-Diagramm. Hierbei wird der Weg über der Zeit abgetragen. Für einen Körper K möge sich die folgende Wertetabelle ergeben haben:

t in s	s in m
0	0
2	1,6
4	3,2
5	4
5,5	4,4
7	5,6
7,5	6



Der Funktionsgraph aller proportionaler Funktionen ist eine Ursprungsgerade. Da bei der geradlinig gleichförigen Bewegung Weg und Zeit in einem proprtionalen Zusammenhang stehen, ergibt als Funktionsgraph im Weg-Zeit-Diagramm eine Strecke, die im Koordinatenursprung startet. Die Geschwindigkeit kann man aus diesen Graphen mittels sogenannter Anstiegsdreiecke bestimmen:



$$\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = \frac{6m - 3,2m}{7,5s - 4s} = \frac{2,8m}{3,5s} = \frac{28m}{35s} = \frac{4m}{5s} = 0,8\frac{m}{s}$$

$$\frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} = \frac{3,2m - 1,6m}{4s - 2s} = \frac{1,6m}{2s} = 0,8\frac{m}{s}$$

$$\frac{\Delta s_3}{\Delta t_3} = \frac{1,6m - 0m}{2s - 0s} = \frac{1,6m}{2s} = 0,8\frac{m}{s}$$

Die Anstiegsdreiecke stimmen in allen Winkeln überein und sind damit alle ähnlich zueinander. Insbesondere ist in unserem Bespiel der Winkel α in allen Dreiecken gleich. Der Quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ist damit für alle Anstiegsdreiecke gleich. Geometrisch lässt sich der Quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ als Gegenkathete durch Ankathete bzgl. α interpretieren. Damit ist unsere Geschwindigkeit $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ nichts anderes als der Tangens von α. Wir überpüfen für das obige Beispiel:

$$\arctan 0,8 = 38,66°$$

1.1.4 Kontrollfragen und -aufgaben zum Weg-Zeit-Diagramm der geradlinig gleichförmigen Bewegung

Aufgabe 1.1.5

Eigenschaften des Weg-Zeit-Diagramms
Für das Weg-Zeit-Diagramm einer geradlinig gleichförmigen Bewegung gilt:

1. *Alle im Diagramm abgetragenen Punkte $P = (t, s)$ liegen auf ....*

2. *Wenn zum Zeitpunkt $t_0 = 0s$ noch kein Weg zurück gelegt wurde, dann startet der Graph im .... des Koordinatensystems.*

3. *Der Anstieg des Graphen ist die .... des Körpers.*

Aufgabe 1.1.6

Antiegsdreieck und Geschwindigkeit
Ein Körper bewegt sich geradlinig gleichförmig mit einer Geschwindigkeit $v = \frac{3}{4}\frac{m}{s}$.

a) *Zeichne für das Zeitintervall $[0s, 10s]$ das Weg-Zeit-Diagramm dieser Bewegung.*

b) *Wieviel Datenpunkte muss man eintragen, wenn man sich absolut sicher ist, dass es sich exakt um eine geradlinig gleichförmige Bewegung handelt?*

c) *Zeichne in das Diagramm drei Anstiegsdreiecke ein. Was haben die Anstiegsdreiecke alle gemeinsam?*

d) *Was haben die Anstiegsdreiecke mit der Geschwindigkeit v zu tun?.*

1.1.5 Die drei Grundaufgaben der geradlinig gleichförmigen Bewegung

Typ 1 Geschwindigkeit aus Weg und Zeit berechnen

Wie schnell fährt man: Es sind der Weg und die zugehörige Zeit gegeben. Die Geschwindigkeit ist zu berechnen.

Aufgabe 1.1.7

Beispielaufgabe Typ 1
Herr Gieding fährt jeden Montag mit seinem RAV4 von Gaiberg nach Heilbronn. Am 16. Oktober brauchte er für die 54km 1 Stunde und 7 Minuten. Wir modellieren die Fahrt als geradlinig gleichförmig. Berechne die Geschwindigkeit des RAV4.

Lösung 1.1.7.1

Beispielaufgabe Typ 1

gegeben:	$s = 54km$
	$t = 67min$
gesucht:	v *in* $\frac{km}{h}$
Überschlag:	*Herr Gieding braucht etwas mehr als eine Stunde für die 54km. Hätte er genau eine Stunde gebraucht, betrüge die Geschwindigkeit des RAV4* $54\frac{km}{h}$. *Weil die Fahrtzeit etwas länger war, ist die Geschwindigkeit etwas kleiner als die* $54\frac{km}{h}$. *Sagen wir rund* $50\frac{km}{h}$
Lösung:	

$$v = \frac{s}{t}$$
$$v = \frac{54km}{67min}$$
$$v = \frac{54km}{\frac{67}{60}h}$$
$$v = \frac{54 \cdot 60}{67}\frac{km}{h}$$
$$v = \underline{\underline{48,36\frac{km}{h}}}$$

Vergleich:	*Der berechnete Wert von* $48,36\frac{km}{h}$ *und der grob geschätze Wert von* $50\frac{km}{h}$ *passen zusammen.*

Typ 2 Weg aus Geschwindigkeit und Zeit berechnen

Wie weit kommt man: Es sind Geschwindigkeit und Zeit gegeben. Der Weg ist zu berechnen.

Aufgabe 1.1.8

Beispielaufgabe Typ 2
Leonie ist mit ihrem Hund im Wald. Plötzlich fängt es an zu gewittern. Es blitzt und erst nach einigen Sekunden hört Leonie den Donner. Das bedeutet, dass das Gewitter noch ein größeres Stück von Leonie entfernt ist. Beim nächsten Blitzeinschlag misst Leonie die Zeit, die vergeht, bis Leonie das Donnern hört. Es sind 9 Sekunden. Wie weit ist Leonie vom Gewitter entfernt? (Die Zeit, die der Blitz braucht, um zu Leonie zu gelangen kann vernachlässigt werden. Die Schallgeschwindigkeit beträgt $343,2\frac{m}{s}$*.)*

Lösung 1.1.8.1

Beispielaufgabe Typ 2

gegeben: $v = 343,2\frac{m}{s}$
$t = 9s$

gesucht: s *in* m

Überschlag: *Wir setzen die Schallgeschwindigkeit etwas niedriger mit* $300\frac{m}{s}$ *an. Dafür wählen wir für die Zeit* $10s$*. Der Abstand müsste also bei etwa* $3000m$ *liegen.*

Lösung:

$$v = \frac{s}{t}$$
$$s = v \cdot t$$
$$s = 343,2\frac{m}{s} \cdot 9s$$
$$s = \underline{\underline{3088,8m}}$$

Vergleich: *Überschlagswert und genauer berechneter Wert passen zusammen.*

Typ 3 Zeit aus Geschwindigkeit und Weg berechnen

Wie lange braucht man: die Zeit für eine bestimmte Stecke ist für eine bestimmete Geschwindigkeit zu berechnen.

Aufgabe 1.1.9

Beispielaufgabe Typ 3
Herr Mayer fährt mit seinem Tesla 3 geradlinig gleichförmig eine Strecke von $63,2km$ *mit einer Geschwindigkeit von* $128\frac{km}{h}$*. bestimme die Fahrzeit von Herrn Mayer für diese Strecke.*

Lösung 1.1.9.1

Beispielaufgabe Typ 3

gegeben: $v = 128\frac{km}{h}$

$s = 63,2m$

gesucht: s *in* m

Überschlag: 130 *ist das Doppelte von 65. Herr Mayer braucht etwa eine halbe Stunde.*

Lösung:

$$v = \frac{s}{t}$$
$$s = v \cdot t$$
$$t = \frac{s}{v}$$
$$s = \frac{63,2km}{128\frac{km}{h}}$$
$$s = \underline{\underline{0,51h}}$$

Vergleich: *Überschlagswert und genauer berechneter Wert passen zusammen.*

1.1.6 Übungsaufgaben zu den drei Grundaufgaben zur geradlinig gleichförmigen Bewegung

Aufgabe 1.1.10

Schall
Die Schallgeschwindigkeit v wird für trockene Luft bei $20°C$ *mit* $343,2\frac{m}{s}$ *angegeben. Bei höherer Luftfeuchtigkeit bereitet sich der Schall geringfügig schneller aus. Es ist ein windstiller sonniger Tag, die Temeratur beträgt exakt* $20°C$.

a) *Gib v in* $\frac{km}{h}$ *an.*

b) *Prof. Mach misst fünf mal, wie lange der Schall für einen Weg von* $3,5km$ *benötigt. Die gemessenen Zeiten hat er wie folgt dokumentiert:* 10,14s; 10,15s; 10,16s; 10,13s; 10,17s. *Ist die Luftfeuchtigkeit höher als normal?*

Aufgabe 1.1.11

Theo Lingen
Nach dem Referendariat bekommt Lisa ihre erste Stelle als Lehrerin für Mathematik und Physik am altehrwürdigen Theo-Lingen-Gymnasium. Leider hat das altehrwürdige Gymnasium schon seit langem keinen Physiklehrer mehr gesehen und Lisas Deputat besteht vor allem aus Physikstunden. Im Physikvorbereitungsraum findet Lisa von der Firma „Der junge Physikus“ verschiedene Glasröhren, die mit Öl und einer Glaskugel gefüllt sind. Sie erinnert sich, im Studium von diesen Röhren gehört zu haben. Sie dienen der experimentellen Untersuchung der geradlinig gleichförmigen Bewegung. Die Röhre wird umgedreht und die Glaskugel sinkt nach einer kurzen Phase der Beschleunigung geradlinig gleichförmig nach unten. In den verschiedenen Röhren bewegen sich die Glaskugeln jeweils mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Selbige sind in $\frac{m}{s}$ *auf der Röhre angegeben. Leider sind die Wegmarkierungen auf den Röhren zu großen Teilen nicht mehr vorhanden. Auf der Röhre mit der Geschwindigkeit* $v = 0,12\frac{m}{s}$ *findet Lisa noch die Anfangsmarkierung* $0m$ *eine der Streckenmarkierungen, leider ohne Zahlenwert.Lisa will nun wissen, wie lang der Weg der Kugel von der 0-Markierung bis zu dieser Markierung ist. Leider findet sie im Physikraum kein Lineal oder irgend ein anderes Gerät zur Bestimmung von Streckenlängen. Daher nimmt sie einfach ihr Smartphone und aktiviert die Stoppuhr des Smartphones. Sie bestimmt die Zeit, die die Kugel von der 0-Markierung zur übrig gebliebenen Markierung zu* $3,8s$. *Bestimme aus diesen Angaben die Länge der Strecke von der 0-Markierung zur übrig gebliebenen Markierung.*

Aufgabe 1.1.12

Lichtjahre
Ein Lichtjahr ist der Weg, den das Licht in einem Jahr zurück legt. Berechne die Distanz eines Lichtjahres.

Aufgabe 1.1.13

LKW
Ein Lastkraftwagen fährt auf der Autobahn von Köln nach Lüttich. Die Fahrstrecke

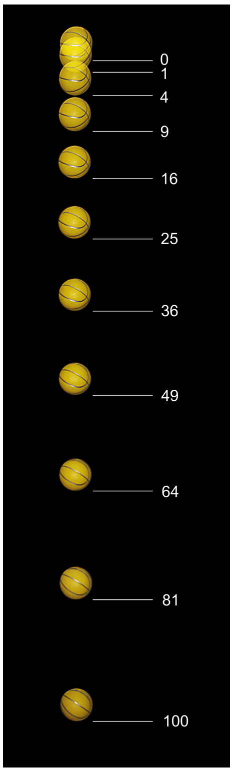
beträgt 162,5 km. Die gesamte Fahrt dauert von 8:00 Uhr bis 11:15 Uhr.

a) Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit des Lastwagens.

b) Die Entfernung von Köln bis zur belgischen Grenze beträgt 75 km. Zu welcher Uhrzeit kommt der Lastwagen voraussichtlich dort an?

1.2 Freier Fall

1.2.1 Analyse einer stroboskopischen Aufnahme



Freier Fall

Wenn man einen Gegenstand fallen lässt, dann wird seine Geschwindigkeit im Laufe der Zeit immer größer. Der Körper hat also nicht zu jedem Zeitpunkt während des Fallens dieselbe Geschwindigkeit wie etwa bei einer geradlinig gleichförmigen Bewegung. Ändert ein Körper seine Geschwindigkeit, so spricht man davon, dass er beschleunigt wird. Das nebenstehende Foto zeigt eine stroboskopische Aufnahme des freien Falls eines Balls (Das Bild stammt von MichaelMaggs, CC BY-SA 3.0.) In gleichen Zeitabständen wurde die Position des Balls festgehalten. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Positionen liegt also immer dieselbe Zeitspanne. Man sieht, dass die zurück gelegten Wege zwischen zwei Zeitpunkten bei längerer Falldauer immer größer werden.
Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen Zeit und zurück gelegtem Fallweg genauer. Leider wissen wir nicht, aus welcher Höhe der Ball wirklich gefallen ist und wir wissen auch nicht den genauen Zeitabstand zwischen zwei Fotos. Trotzdem können wir den Zusammenhang zwischen Zeit und Fallweg prinzipiell untersuchen:

- Wir wählen den Fallweg nach der ersten Messung als eine Längeneinheit le.
- Die gleichen Zeitabstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Messungen bezeichnen wir als unsere Zeiteinheit ze.

Entsprechend der Aufnahme „Freier Fall“ erkennen wir folgende Zugehörigkeiten:

- Dem Zeitpunkt $0ze$ ist der Fallweg $0le$ zuzuordnen,
- dem Zeitpunkt $1ze$ ist der Fallweg $1le$ zuzuordnen,
- dem Zeitpunkt $2ze$ ist der Fallweg $4le = 2 \cdot 2le$ zuzuordnen,
- dem Zeitpunkt $3ze$ ist der Fallweg $9le = 3 \cdot 3le$ zuzuordnen,
- dem Zeitpunkt $4ze$ ist der Fallweg $16le = 4 \cdot 4le$ zuzuordnen,
- dem Zeitpunkt $5ze$ ist der Fallweg $25le = 5 \cdot 5le$ zuzuordnen,

- dem Zeitpunkt $6ze$ ist der Fallweg $36le = 6 \cdot 6le$ zuzuordnen,

- dem Zeitpunkt $7ze$ ist der Fallweg $49le = 7 \cdot 7le$ zuzuordnen,

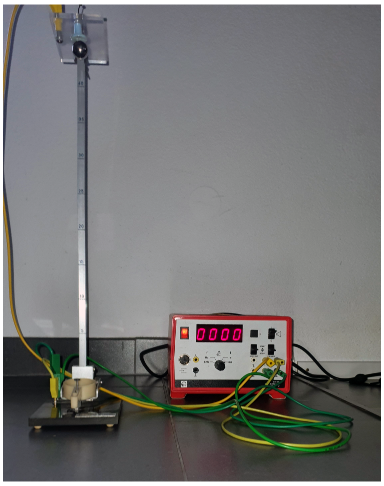
- dem Zeitpunkt $8ze$ ist der Fallweg $64le = 8 \cdot 8le$ zuzuordnen,

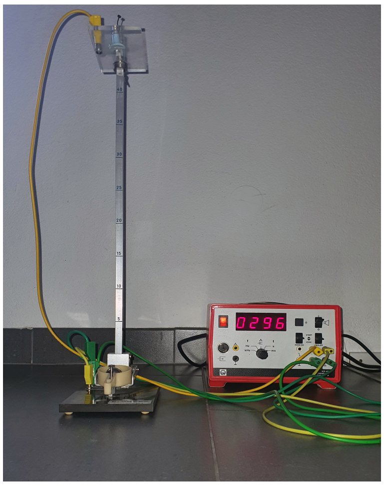
- dem Zeitpunkt $9ze$ ist der Fallweg $81le = 9 \cdot 9le$ zuzuordnen,

- dem Zeitpunkt $10ze$ ist der Fallweg $100le = 10 \cdot 10le$ zuzuordnen.

1.2.2 Experimentelle Bestimmung von zugehörigen Fallzeiten bei bestimmten Fallhöhen

Offenbar besteht ein quadratischer Zusammenhang zwischen Zeit und Weg beim freien Fall. Wir wollen das genauer untersuchen und verwenden dazu die folgende Versuchsanordnung:

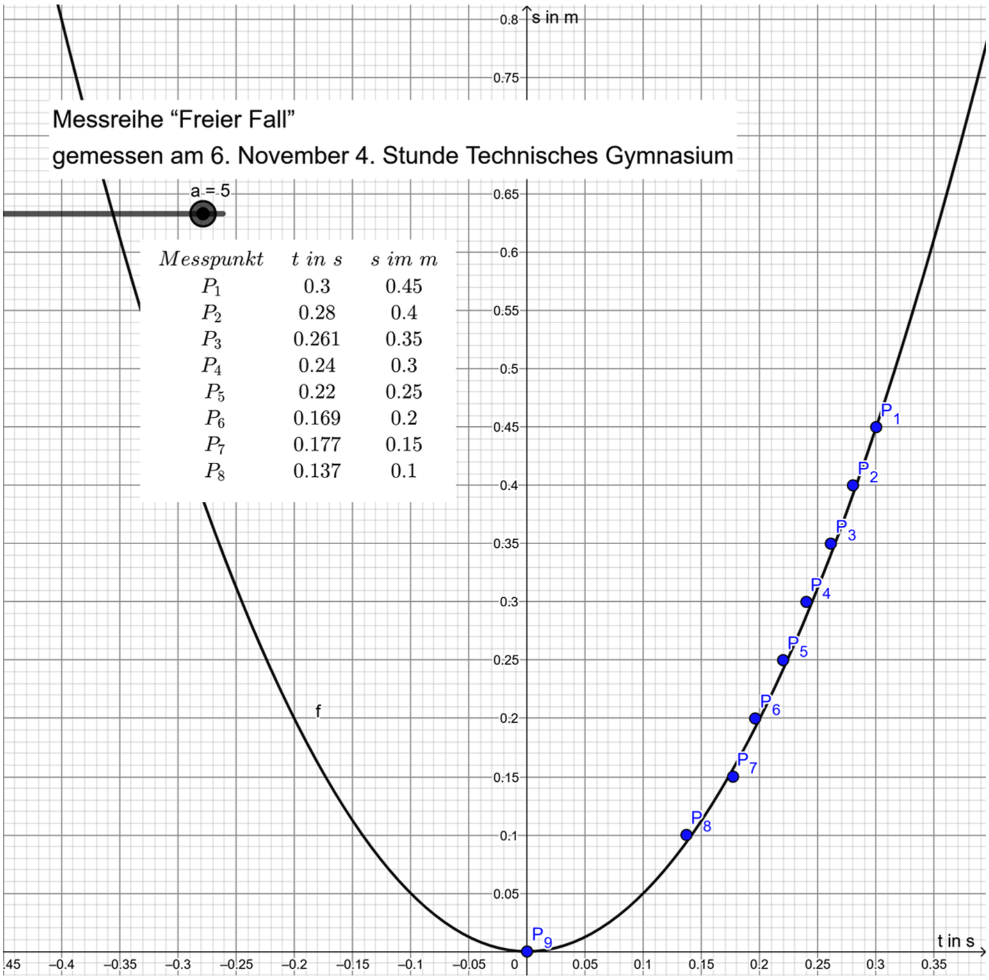




Auf einem Stativstab sind Streckenmakierungen im Abstand von $5cm$ angeordnet. Die oberste Markierung befindet sich bei einer Höhe von $45cm$. Auf dem Stativstab ist beweglich eine elektromagnetische Halterung für eine Stahlkugel angeordnet. Unten am Stativstab befindet sich ein mechanischer Schalter, der geschlossen wird, wenn die Stahlkugel auf ihn fällt. Das Ganze ist mit einer elektronischen Stoppuhr verbunden. Mittels eines Schalters wird die Stromversorgung des Elektromagneten unterbrochen. In diesem Moment beginnt die Kugel nach unten zu fallen und die Stoppuhr startet die Zeitmessung. Dann trifft die Kugel auf den unteren Schalter und die Uhr stoppt die Zeitmessung. Für verschiedene Fallhöhen konnten wir im Unterricht die folgende Wertetabelle generieren:

t in s	s in m
0,300	0,45
0,280	0,40
0,261	0,35
0,240	0,30
0,220	0,25
0,169	0,20
0,177	0,15
0,137	0,10

Im Folgenden wurden diese Werte in eine Geogebra-Diagramm eingetragen. Durch die Messpunkte wurde eine Parabel vom Typ $s = at^2$ gelegt. Der Faktor a ließ sich über einen Schieberegler einstellen. Für den $a = 5$ passte die Parabel recht gut durch unsere Meßpunkte.



`https://www.geogebra.org/classic/g2cq8eey`

Natürlich enthalten unsere Messwerte Fehler. Mit exakteren Methoden kann man wirklich nachweisen, dass der Zusammenhang von Zeit und Weg für den freien Fall ein quadratischer ist und die Meßpunkte auf einer Parabel vom Typ $s = at^2$ liegen. Für den Faktor a gilt in unseren Breiten $a = \frac{9{,}81}{2} \frac{m}{s^2}$. Der Wert $9{,}81 \frac{m}{s^2}$ wird Erdbeschleunigung genannt und mit dem Formelzeichen g bezeichnet.

1.2.3 Das Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls

Zwischen den Größen Zeit und Weg (Fallhöhe) besteht beim freien Fall ein quadratischer Zusammenhang, d.h. es gilt:

- verdoppelt sich die Fallzeit vervierfacht sich die Fallhöhe,
- verdreifacht sich die Fallzeit verneunfacht sich die Fallhöhe,
- vervierfacht sich die Fallzeit versechszehnfacht sich Fallhöhe,
- halbiert sich die Fallzeit, so beträgt die Fallhöhe nur noch ein Viertel.

Anders ausgedrückt: Beim freien Fall sind der Weg s und das Quadrat der zugehörigen Zeit t proportional zueinander. Das bedeutet, dass der Quotient aus Fallhöhe und dem Quadrat der Fallzeit immer denselben Wert p (Proportionalitätsfaktor) ergeben:

$$\frac{s}{t^2} = p$$

Der Proportionalitätsfaktor p ist dabei die halbe Erdbeschleunigung $p = \frac{9{,}81}{2} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Damit lässt sich das Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls wie folgt als Funktionsgleichung formulieren:

$$s = \frac{g}{2} t^2$$

Das Weg-Zeit-Diagramm für den freien Fall ist damit eine Parabel vom Typ $y = p \cdot x^2$ wobei der Faktor p die halbe Erdbeschleunigung ist.

1.2.4 Beispielaufgabe: Bestimmung der Fallhöhe durch Messung der Fallzeit

Aufgabe 1.2.1

Fallhöhe bestimmen
Lisa muss im Rahmen eines Survivalcamps die Tiefe eines alten Dorfbrunnens bestimmen. Hierzu lässt sie einen Stein auf der Höhe des Brunnenrandes in den Brunnen fallen und misst die Zeit bis zum Aufschlag des Steines auf der Wasseroberfläche. Lisa misst hierfür die Zeit von 1,5s . Bestimme die Brunnentiefe.

Lösung 1.2.1.1

Fallhöhe bestimmen

gegeben:

$$t = 1{,}5s$$
$$g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$$

gesucht:

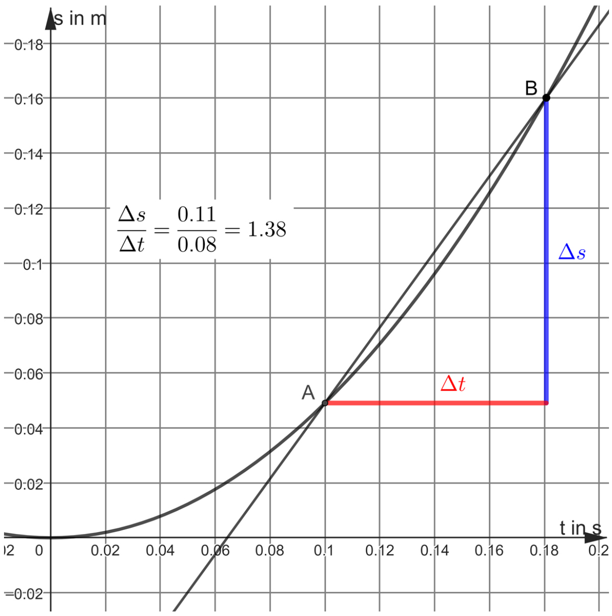
$$s \text{ in } m$$

Lösung:

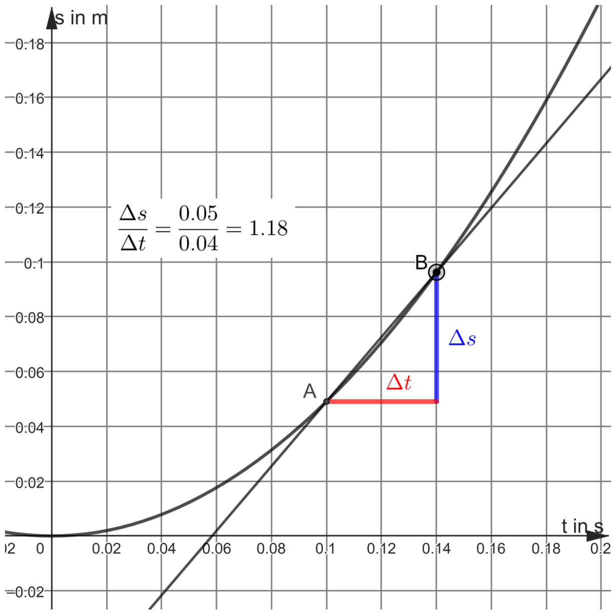
$$s = \frac{g}{2}t^2$$
$$s = \frac{9{,}81m}{2s^2} \cdot \left(\frac{3}{2}s\right)^2$$
$$s = \frac{9{,}81m}{2s^2} \cdot \frac{9}{4}s^2$$
$$s = \frac{9{,}81 \cdot 9}{8}m$$
$$s \approx 11m$$

1.2.5 Das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz des freien Falls.

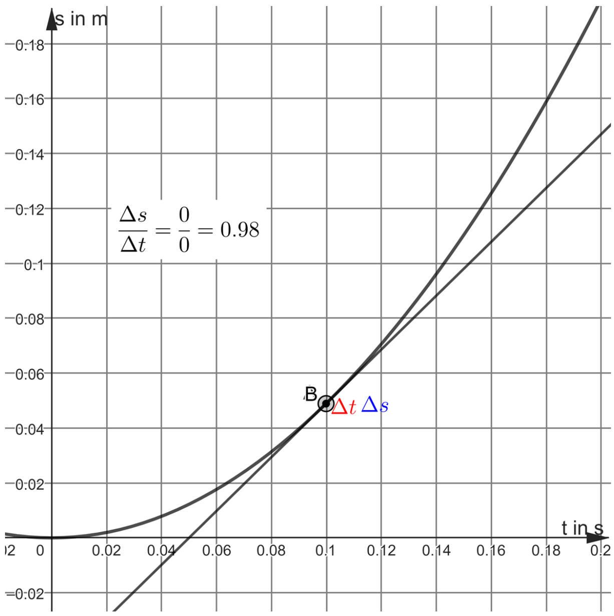
Bei gegebenen Fallzeiten die Fallhöhen oder umgekehrt bestimmen ist das eine. Das andere ist die berechnung der Geschwindigkeit eines fallenden Körpers zu bestimmten Fallzeiten. Hierzu betrachten wir noch einmal das Weg-Zeit-Diagramm des freien Falls:



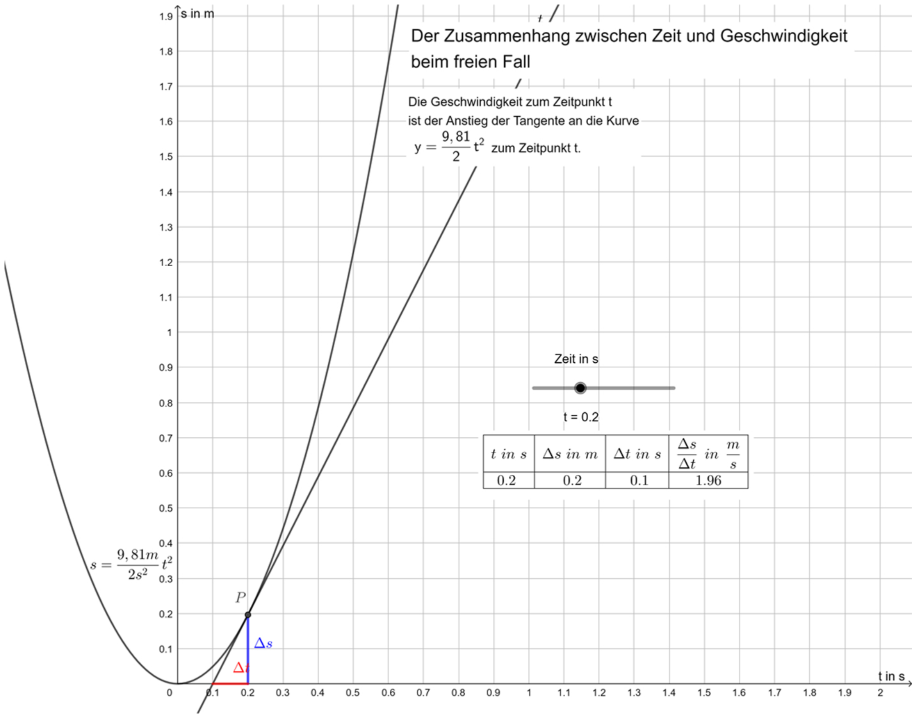
Die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten t_A und t_B können wir dadurch bestimmen, das wir den Anstieg der Geraden AB bestimmen. Diese Durchschnittsgeschwindigkeit könnten wir als erste Näherung für die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt T_A verwenden. Noch dichter sind wir mit dieser Durchschnittsgeschwindigkeit an unserer Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_A dran, wenn der Zeitpunkt t_B dichter am Zeitpunkt t_A liegt:



Je dichter der Punkt B an den Punkt A, wandert, je geringer als Δt wird desto mehr gleicht die Durchschnittsgeschwindigkeit der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_A. Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt T_A würde dann mit dem Anstieg der Geraden AB zusammenfallen, wenn AB die Parabel $s = \frac{g}{2}t^2$ nur in dem Punkt A berühren würde. In diesem Fall würde der Punkt B mit dem Punkt A zusammen fallen und die Gerade AB hätte nur den Punkt A mit der Parabel gemeinsam, d.h. AB wäre die Tangente an die Parabel zum Zeitpunkt t_A.



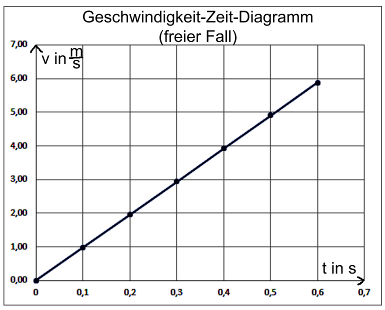
Um einen Zusammenhang zwischen Zeit und Geschwindigkeit beim freien Fall zu erkennen, nehmen wir das Werkzeug Geogebra quasi als Black Box. Auch wenn wir momentan selbst nicht wüssten wie, kann Geogebra doch automatisch Tangenten an eine Parabel generieren. Hierzu dient die folgende Geogebradatei: `https://www.geogebra.org/classic/cdst3jhc`



Die Arbeit mit der Datei generiert die folgende Wertetabelle:

t in s	v in $\frac{m}{s}$
0	0,00
0,1	0,98
0,2	1,96
0,3	2,94
0,4	3,92
0,5	4,91
0,6	5,89

Das entsprechende Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm lässt einen proportionalen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Zeit beim freien Fall vermuten.



Die Untersuchung der Quotienten $\frac{v}{t}$ bestätigt das:

t in s	v in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$\frac{v}{t}$
0	0,00	
0,1	0,98	9,81
0,2	1,96	9,81
0,3	2,94	9,81
0,4	3,92	9,81
0,5	4,91	9,81
0,6	5,89	9,81

Dieser Quotient sieht stark nach der Erdbeschleunigung g aus. Dem ist auch so. Damit ergibt sich die Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit beim freien Fall wie folgt:

$$v = g \cdot t$$

1.2.6 Beispielaufgabe: Berechnung der Auftreffgeschwindigkeit beim freien Fall

Aufgabe 1.2.2

Kölntriangle
Das sogenannte Kölntriangle ist ein Hochhaus in Köln, das im Jahr 2006 eröffnet wurde. es verdankt seinen Namen dem Querschitt des Hauses. Selbiger ist ein Dreieck mit gebogenen Seiten. Auf dem Kölntriangle befindet sich in einer Höhe von 103,20*m Höhe eine Aussichtsplattform. Jemand lässt aus dieser Höhe einen Stein auf die darunter liegende Straße fallen. Mit welcher Geschwindigkeit (in* $\frac{km}{h}$*) trifft der Stein auf?*

Lösung 1.2.2.1

Kölntriangle
gegeben:

$$\begin{aligned} &\textit{Fallhöhe:} \\ s &= 103{,}20 m \end{aligned}$$

gesucht:

$$\begin{aligned} &\textit{Auftreffgeschwindigkeit in } \frac{km}{h} \\ &v \end{aligned}$$

Lösungsplan:

1. *Fallzeit berechnen,*

2. *Auftreffgeschwindigkeit in $\frac{m}{s}$ berechnen,*

3. *Umrechnung in $\frac{km}{h}$.*

Lösung:
Lösungsschritt 1:

$$s = \frac{g}{2}t^2$$
$$t^2 = s \cdot \frac{2}{g}$$
$$t = \sqrt{s \cdot \frac{2}{g}}$$
$$t = \sqrt{103{,}20m \cdot \frac{2}{9{,}81\frac{m}{s^2}}}$$
$$t = \sqrt{\frac{206{,}40}{9{,}81}s^2}$$

Lösungsschritt 2:

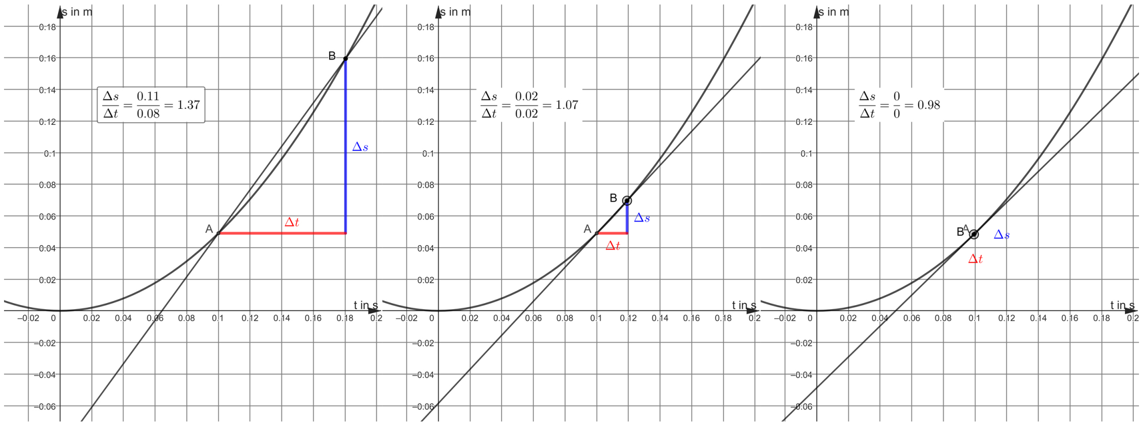
$$v = g \cdot t$$
$$v = 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot \sqrt{\frac{206{,}40}{9{,}81}s^2}$$
$$v = \sqrt{9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot \frac{206{,}40}{9{,}81}s^2}$$
$$v = \sqrt{9{,}81\frac{m^2}{s^2} \cdot 206{,}40}$$
$$v = 44{,}99759994\frac{m}{s}$$
$$v \approx 45\frac{m}{s}$$

Lösungschritt 3:

$$v = 44{,}99759994 \cdot 3{,}6\frac{km}{h}$$
$$v = 134{,}9927998\frac{km}{h}$$
$$v \approx 135\frac{km}{h}$$

1.2.7 Mathematische Herleitung $v = gt$

Für die Herleitung des Geschwindigkeit-Zeit-Gesetzes des freien Falls lieferte uns Geogebra die Tangenten und ihre Anstiege. Im Folgenden beweisen wir mathematisch, dass sich die Momentangeschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt wirklich zu $v = gt$ berechnet. Hierzu betrachten wir wieder Tangenten an die Parabel des Weg-Zeit-Diagramms des freien Falls:



Je dichter sich der Punkt B dem Punkt A nähert, desto weniger unterscheiden sich die Strecke $\overline{AB}$ und der Parabelbogen $\widehat{AB}$. Solange die Gerade AB die Parabel in den beiden verschiedenen Punkten A und B schneidet, berechnet sich die Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall $[t_A, t_B]$ zu

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Δs war nichts weiter als $s_B - s_A$ und für Δt gilt: $\Delta t = t_b - t_A$. s_B ist der Weg der zum Zeitpunkt t_B zurück gelegt wurde und s_A der Weg, der zum Zeitpunkt t_A zurück gelegt wurde. Beide Wege lassen sich nach dem Weg-Zeit-Gesetz $S = \frac{g}{2}t^2$ berechnen: $s_B = \frac{g}{2}t_B^2$ und $s_A = \frac{g}{2}t_A^2$. Damit ergeben sich folgende Rechnungen:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1.1}$$

$$v = \frac{s_B - s_A}{t_B - t_A} \tag{1.2}$$

$$v = \frac{\frac{g}{2}t_b^2 - \frac{g}{2}t_a^2}{t_B - t_A} \tag{1.3}$$

$$v = \frac{g}{2}\frac{t_B^2 - t_A^2}{t_B - t_A} \tag{1.4}$$

$$v = \frac{g}{2}\frac{(t_B - t_A)(t_B + t_A)}{t_B - t_A} \tag{1.5}$$

$$v = \frac{g}{2}(t_B + t_A) \tag{1.6}$$

Im Fall $B \equiv A$ bzw. $t_B = t_A$ ist die Gerade AB Tangente an $s = \frac{g}{2}t^2$ zum Zeitpunkt t_A. In diesem Fall da $t_A = t_B$ ergibt sich Gleichung (1.6) zu

$$v = \frac{g}{2}(t_A + t_A) = \frac{g}{2}2t_A = g \cdot t_A$$

und damit allgemein für beliebige Zeiten t:

$$v = g \cdot t$$

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Der freie Fall ist ein Spezialfall der gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Wir abstrahieren jetzt von der Erdbeschleunigung g und lassen auch andere Beschleunigungen zu.

- Die Bewegung eines Körpers heißt dann beschleunigt, wenn sich im Laufe der Zeit seine Geschwindigkeit ändert.
- Die Beschleunigung bestimmt also, wie sich die Geschwindigkeit eines Körpers ändert.
- Die Beschleunigung hat das Formelzeichen a.
- Die Einheit der Beschleunigung ist $1 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
- Die Bewegung eines Körpers heißt gleichmäßig beschleunigt, wenn die Geschwindigkeit des Körpers proportional zur Zeit ist.
- Bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung gilt also.
  - verdoppelt sich die Zeit, die ein Körper unterwegs ist, dann verdoppelt sich auch seine erreichte Geschwindigkeit,
  - halbiert sich die Zeit, die ein Körper unterwegs ist, dann halbiert sich auch seine erreichte Geschwindigkeit.
- Bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung berechnet sich die Geschwindigkeit v zu einem bestimmten Zeitpunkt t nach der Formel: $v = at$