5 Übungsaufgaben zum 11. Dezember 2020

5.1 Aufgaben, zu deren Lösung nur die Mittel der neuen Theorie zugelassen sind

Aufgabe 5.1

Halbgeraden
Es seien A und B zwei verschiedene Punkte. Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

a) $AB^+ \cup AB^-$

b) $AB^+ \cap AB^-$

c) $AB^+ \cap BA^+$

d) $BA^- \cap AB^-$

e) $BA^- \cup AB^-$

Aufgabe 5.2

Halbebenen
In der Ebene ε seien die Gerade g und der Punkt P gegeben. P möge nicht mit g inzidieren. Veranschaulichen Sie die folgenden beiden Mengen mittels Skizzen:

a) $gP^+ := \{Q | \overline{PQ} \cap g = \emptyset\} \cup g$

b) $gP^- := \{Q | \overline{PQ} \cap g \neq \emptyset\}$

Aufgabe 5.3

Dreiecke
Ein Dreieck ist die Vereinigungsmenge dreier Strecken. Geben Sie eine formal korrekte Definition für den Begriff Dreieck an.

Aufgabe 5.4

Kugeln
Definieren Sie den Begriff Kugel mit dem Mittelpunkt m und dem Radius r.

Aufgabe 5.5

Ellipsen
Wir setzen im folgenden Geometrie in der Ebene voraus. Gegeben seien zwei Punkte F_1 und F_2 mit $|F_1F_2| = 8$. Konstruieren Sie 10 Punkte der folgenden Menge:

$$E = \{P| \; |PF_1| + |PF_2| = 10\}$$

Aufgabe 5.6

Strecken

Strecken werden gern als die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten beschrieben. Erläutern Sie diese Vorstellung im Kontext des Axioms von der Dreiecksungleichung.

Aufgabe 5.7

Abstände

Es seien A, B, P_1, P_2 paarweise verschiedene Punkte.
Beweisen Sie:

$$\mathrm{Zw}(A, P_1, B) \wedge \mathrm{Zw}(P_1, P_2, B) \Rightarrow \mathrm{Zw}(A, P_2, B)$$

5.2 Aufgaben, zu deren Lösung Ihr Schulwissen zugelassen ist

Aufgabe 5.8

Ellipsen

Ebene Geometrie:
Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte, deren Abstandssumme zu zwei gegebenen festen Punkten F_1 und F_2 konstant ist. Die beiden festen Punkte F_1 und F_2 heißen Brennpunkte der Ellipse.

Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt F_1 und F_2 ein fester Punkt aus dem Inneren von k. L sei ein beliebiger Punkt auf k, m die Mittelsenkrechte von $\overline{LF_2}$ und P der Schnittpunkt von m mit $\overline{LF_1}$.

Beweisen Sie: Wenn L alle Punkte des Kreises durchläuft, beschreibt P eine Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2.

Aufgabe 5.9

Sätze am Kreis

Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. $\overline{AB}$ sei eine Sehne von k, die kein Durchmesser von k ist. $\overline{AC}$ sei ein Durchmesser von k. Beweisen Sie:

$$|\angle AMB| = 2 \cdot |\angle ACB|$$