Aufgabe 11.1
Definieren Sie die Begriffe *Innenwinkel eines Dreiecks* und *Außenwinkel eines Dreiecks*.

(Innenwinkel eines Dreiecks): Sei ABC ein Dreieck. Die Winkel $< AB^+, AC^+$; $< BA^+, BC^+$ und $< CA^+, CB^+$ sind Innenwinkel des Dreiecks ABC.

(Außenwinkel eines Dreiecks): Außenwinkel eines Dreiecks sind alle Nebenwinkel der Innenwinkel des Dreiecks ABC.

Hinweis: Die Schenkel eine Winkels sind Strahlen. Die Seiten eines Dreiecks sind Strecken.

Aufgabe 11.2
Beweisen Sie:
<u>Korollar 1 zum schwachen Außenwinkelsatz</u>
In jedem Dreieck sind mindestens zwei Innenwinkel spitze Winkel.

Annahme: Es existieren zwei Innenwinkel α und β mit $|\alpha| \geq 90 \leq |\beta|$.

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	$\lvert\alpha\rvert \geq 90$	Annahme
2)	Für den NW von α, α' gilt: $\alpha' \leq 90$.	(1), Def. NW, Supplementäraxiom, Def. supplementär, Rechnen in $\lvert R$
3)	$\lvert\beta\rvert$ und $\lvert\gamma\rvert$ sind kleiner als 90.	(2), schwacher Außenwinkelsatz
4)	Widerspruch zur Annahme	(3), Annahme

Aufgabe 11.3
Beweisen Sie:
<u>Korollar 2 zum schwachen Außenwinkelsatz</u>
Die Summe der Größen zweier Innenwinkel eines Dreiecks ist stets kleiner als 180.

Annahme: o. B. d. A. $|\alpha| + |\beta| \geq 180$

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	$\lvert\beta\rvert + \lvert\beta'\rvert = 180$	Def. Außenwinkel, Def. NW, Sup.Ax., Def. suppl.
2)	$\lvert\beta'\rvert > \lvert\alpha\rvert$	(1), Schwacher Außenwinkelsatz
3)	$\lvert\beta\rvert + \lvert\alpha\rvert < 180$	(1), (2), Rechnen in $\lvert R$
4)	Widerspruch zur Annahmen	(3)

Aufgabe 11.4
Definieren Sie: Stufenwinkel, Wechselwinkel.

Stufenwinkel:
Seien a und b zwei Geraden, die von einer dritten Geraden c derart geschnitten werden, dass $a \cap b \cap c = \{\}$ gilt. Die Schnittpunkte werden wie folgt benannt: $a \cap c = \{S_A\}$ und $b \cap c = \{S_B\}$. Ferner sei A ein Punkt auf a, für den gilt, dass er kein Element von c ist. B sei ein Punkt auf B in der offenen Halbebene cA^+. Die Winkel $< S_BS_A^-, S_BB^+$ und $< S_AS_B^+, S_AA^+$ sind Stufenwinkel.

Wechselwinkel:
α und β seien Stufenwinkel. Der Scheitelwinkel von α, α' und der Winkel β bilden ein Paar von Wechselwinkeln.

Aufgabe 11.5
Beweisen Sie: Wenn P ein Punkt außerhalb der Geraden g ist, dann gibt es eine Gerade h, die durch P geht und parallel zu g ist.

Aus der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes wissen wir, dass zwei Geraden genau dann parallel sind, wenn die Stufenwinkel kongruent zueinander sind.

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	Wir fällen das Lot von P auf g. Der dabei entstehende Lotfußpunkt heiße S.	Definition Lot, VSS
2)	$\lvert < SP^+, g \rvert = 90$	Definition Lot, Konstruktion
3)	Durch P existiert genau eine Gerade p, die durch P verläuft und senkrecht auf SP steht.	Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Senkrechten
4)	Jeder Winkel $<PS^+, p$ hat das Maß 90.	(3), Definition Lot und senkrecht
5)	$\lvert <SP^+, g \rvert = \lvert <PS^+, p \rvert = 90$ und Winkel sind Stufenwinkel	(2), (4), Definition Stufenwinkel
6)	p verläuft durch P und ist parallel zu g.	(5), Umkehrung STWS

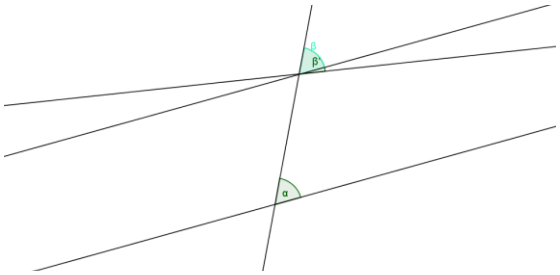
Aufgabe 11.6
Gegen welche Forderung, die an Axiomensysteme zu stellen ist, verstößt die folgende Formulierung des Parallelenaxioms:
Zu jedem Punkt P außerhalb einer Geraden g gibt es genau eine Gerade h, die durch P geht und zu g parallel ist.
Gegen die Unabhängigkeit der Axiome!

Aufgabe 11.7
Beweisen Sie den Stufenwinkelsatz.

a|| b => |α| = |β|

Annahme: | α | ≠ |β|

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	a || b und | α | ≠ |β|	Voraussetzung, Annahme
2)	Es existiert ein Winkel β': |β| = |α|	(1), WMA, WKA
3)	Die Gerade b', die einen Schenkel von β' als Teilmenge besitzt, ist parallel zu a	(2), Umkehrung Stufenwinkel-satz
4)	a ist nicht parallel zu b, da dies einen Wider-spruch zum Parallelenaxiom darstellt	(3), Voraussetzung, Parallelen-axiom
5)	Annahme ist zu verwerfen	(4)



Aufgabe 11.8
Beweisen Sie den Innenwinkelsatz für Dreiecke.

Satz: Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt genau 180.

Sei ABC ein Dreieck mit schulüblicher Bezeichnung.

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	Es existiert eine Gerade a', die durch C verläuft und parallel zu AB ist.	Parallelenaxiom, Existenz von Parallelen
2)	α und α' sind Wechselwinkel und kongruent zueinander. β und β' sind ebenfalls Wechselwinkel und kongruent zueinander.	(1), Wechselwinkel (Def. und Satz), Konstruktion
3)	Sei |α'| + |γ| = |δ|	Winkeladditionsaxiom, (2), Konstruktion
4)	δ und β sind NW und somit gilt: |δ| + |β'| = 180	Def. NW, Supplementaxiom, Def. supplementär, Konstrukti-on
5)	Nach 3) gilt: |α'| + |γ| = |δ| |α'| + |γ| + | β'| = 180	(3), (4), Rechnen in |R
6)	|α| + |β| + |γ| = 180	(2), (5)

Aufgabe 11.9
Beweisen Sie den starken Außenwinkelsatz.

Satz: Jeder Außenwinkel ist so groß, wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

Sei α ein f. a. b. Innenwinkel des Dreiecks ABC und α‘ ein f. a. b. Nebenwinkel von α. Ferner seien die restlichen Innenwinkel mit β und γ bezeichnet.

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	α' ist Außenwinkel zu α.	Definition Außenwinkel.
2)	|α| + |β| + |γ| = 180	Satz über die Innenwinkel-summe im Dreieck
3)	|α| + |α‘| = 180	Definition Nebenwinkel, VSS
4)	|α| + |β| + |γ| = |α| + |α‘|	(2), (3)
5)	|β| + |γ| = |α‘|	(4), Rechnen in |R

NEUER AUFGABENTEIL

Aufgabe 11.4
Beweisen Sie: Sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit schulüblichen Bezeichnungen. Es gilt:
$|\alpha| > |\beta| \Rightarrow |a| > |b|$

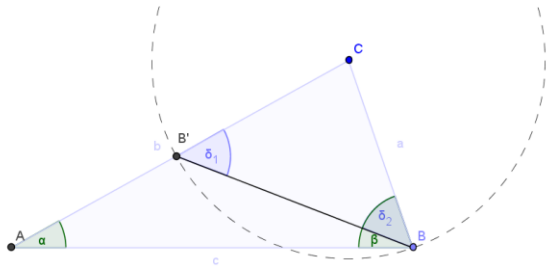
Annahme: |a| ≤ |b|

Fall 1: |a| = |b|

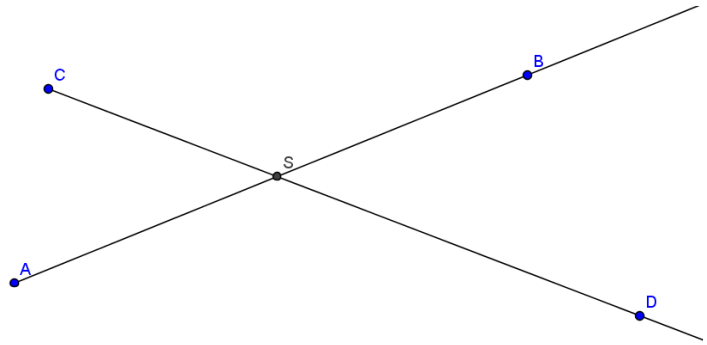
Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	|a| = |b|	Annahme, Fall 1
2)	|α| > |β|	Voraussetzung
3)	Widerspruch zum Basiswinkelsatz	Basiswinkelsatz, (1), (2)

Fall 2: |a| < |b|

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	|a| < |b|	Annahme, Fall 2
2)	∃ B’ auf CA^+: |CB’| = |CB|	Axiom II.1, Axiom vom Lineal
3)	$\|\delta_1\| = \|\delta_2\|$	Basiswinkelsatz, (2)
4)	$\|\delta_2\| < \|\beta\|$	Winkeladditionsaxiom, Lemma W/1, Rechnen in |R
5)	$\|\alpha\| < \|\delta_1\|$	Schwacher Außenwinkelsatz
6)	|α| < |β|	(3), (4), (5), Transitivität von ‚=’ und ‚<’
7)	Widerspruch zur Annahme	(6)



Aufgabe 11.5
Beweisen Sie den Scheitelwinkelsatz: Scheitelwinkel sind kongruent zueinander.



VSS: < ASD und < CSB sind Scheitelwinkel
Beh.: Scheitelwinkel sind kongruent

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	|<CSB| + |<BSD| = 180	Def. NW, Supplementaxiom, Def. supplementär
2)	|<ASD| + |<BSD| = 180	- " -
3)	|<CSB| + |<BSD| = |<ASD| + |<BSD|	(1), (2), Rechnen in |R
4)	|< CSB| = |<ASD|	(3), Rechnen in |R

Aufgabe 11.6
Beweisen Sie: Sei P ein Punkt und g eine Gerade. Es existiert genau ein Lot von P auf g.

Dazu nehmen wir an, dass P nicht auf g liegt, ansonsten existiert nämlich kein Lot!

Nummer	Beweisschritt	Begründung
1)	Sei Q ein Punkt auf g, sodass ein Winkel <g, QP^+ existiert. Sei dieser Winkel im folgenden α	Axiom I.1, Winkelmaßaxiom
2)	In gP^- existiert ebenfalls ein Strahl QP* mit |<g, QP^{*+} | = |α| und |QP*| = |QP|	(1), Winkelkonstruktionsaxiom, Axiom vom Lineal
3)	Es existiert eine Strecke PP*, die die Gerade g im Punkt L schneidet	Definition Halbebene, Konstruktion nach (1), (2)
4)	Es gilt: ΔPLQ ist kongruent zu ΔP*LQ	SWS, (1), (2), |QL| = |QL| - trivial
5)	|<PLQ| = |<P*LQ| = 90	Winkel sind NW, (4), Definition Kongruenz, rechter Winkel, Satz über rechte Winkel
6)	PP* ist senkrechte auf g und eindeutig	(5), Definition senkrecht, Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Senkrechten
7)	Strecke PL ist eindeutiges Lot auf g.	(6), Definition Lot

Aufgabe 11.7
Definieren Sie: Stufenwinkel, Wechselwinkel, entgegengesetzt liegende Winkel.
Zwei Winkel <A,S,B und <C,P,D heißen entgegengesetzt liegende Winkel, wenn sie bzgl. der Geraden SP in ein und derselben Halbebene liegen und die Strecke SP jeweils Teilmenge eines Schenkels der jeweiligen Winkel <A,S,B und <C, P, D ist.