Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 3

(Lösungen)

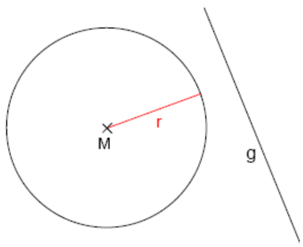
Aufgaben zu Mengen mit Beispielen aus der Geometrie:

1. Gegeben sind ein Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M sowie eine Gerade g. Die Gerade g und der Kreis k lassen sich als Punktmengen auffassen.
   Geben Sie in Abhängigkeit von dem Radius r des Kreises k sowie dem Abstand* $d(M,g)$ des Mittelpunktes des Kreises k von der Geraden g Bedingungen dafür an, dass
   - $k_1 \cap g$ die leere Menge ist;
   - $k_1 \cap g$ genau ein Element (d. h. einen Punkt) enthält
     (man sagt dazu auch: Die Menge $k_1 \cap g$ hat die Mächtigkeit 1);
   - $k_1 \cap g$ genau zwei Elemente enthält (die Menge $k_1 \cap k_2$ also die Mächtigkeit 2 hat).

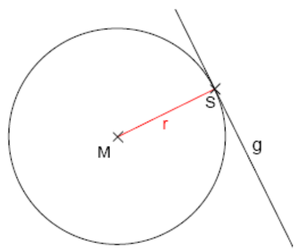
   *Unter dem Abstand $d(P,g)$ eines Punktes P von einer Geraden g versteht man das Minimum der Abstände aller Punkte $X \in g$ von P: $d(P,g) = \min_{X \in g} |PX|$.

Lösung: Es seien k ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M, sowie g eine beliebige Gerade. Darüber hinaus beschreibt $d(M,g)$ den Abstand des Mittelpunktes des Kreises k von der Geraden g. Dann gilt:

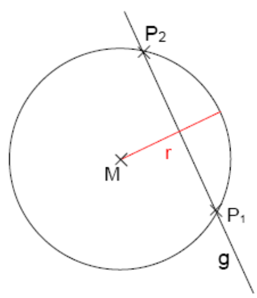
– $k \cap g = \varnothing \Leftrightarrow d(M,g) > r$:



– $k \cap g$ enthält genau ein Element $\Leftrightarrow d(M,g) = r$:



– $k \cap g$ enthält genau zwei Elemente $\Leftrightarrow d(M,g) < r$:



2. Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Radien r_1 bzw. r_2 und den Mittelpunkten M_1 bzw. M_2.

   a) Wie viele Elemente (Punkte) kann die Schnittmenge $k_1 \cap k_2$ der beiden Kreise enthalten?

   b) Geben Sie in Abhängigkeit von den Radien r_1 und r_2 sowie dem Abstand $|M_1M_2|$ der beiden Mittelpunkte Bedingungen dafür an, dass

   - $k_1 \cap k_2$ die leere Menge ist;
   - $k_1 \cap k_2$ genau ein Element enthält (die Menge $k_1 \cap k_2$ also die Mächtigkeit 1 hat);
   - $k_1 \cap k_2$ genau zwei Elemente enthält (die Menge $k_1 \cap k_2$ also die Mächtigkeit 2 hat);
   - $k_1 \cap k_2$ mehr als zwei Elemente enthält (die Mächtigkeit von $k_1 \cap k_2$ größer als 2 ist).

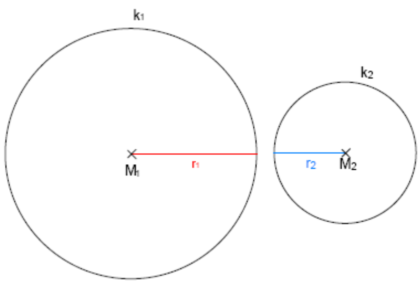
Lösung: Es seien k_1 und k_2 zwei beliebige Kreise mit den Radien r_1 und r_2 und den Mittelpunkten M_1 und M_2.

(a) Die Schnittmenge $k_1 \cap k_2$ kann die leere Menge sein oder genau ein, zwei oder unendlich viele Elemente enhalten.

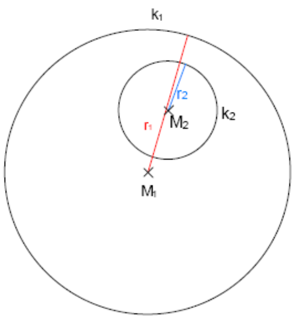
(b) In Abhängigkeit von den Radien r_1 und r_2 sowie dem Abstand $|M_1M_2|$ ergeben sich folgende Schnittmengen.

– **Möglichkeit 1:** $k_1 \cap k_2 = \varnothing \Leftrightarrow r_1 + r_2 < |M_1M_2|$ oder $|r_1 - r_2| > |M_1M_2|$.

Fall 1: $r_1 + r_2 < |M_1M_2|$

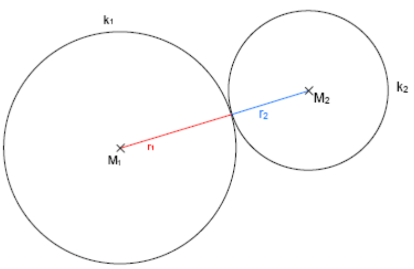


Fall 2: $|r_1 - r_2| > |M_1M_2|$

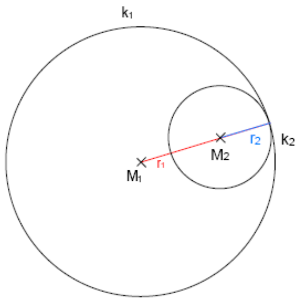


– **Möglichkeit 2:** $k_1 \cap k_2$ enthält genau ein Element $\Leftrightarrow r_1 + r_2 = |M_1M_2|$ oder $|r_1 - r_2| = |M_1M_2|$ mit $r_1 \neq r_2$.

Fall 1: $r_1 + r_2 = |M_1M_2|$

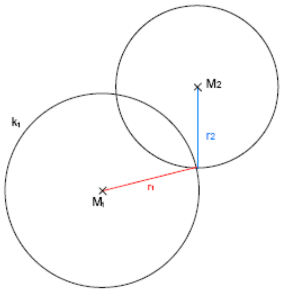


Fall 2: $|r_1 - r_2| = |M_1M_2|$, $r_1 \neq r_2$

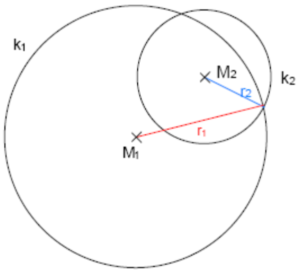


– **Möglichkeit 3:** $k_1 \cap k_2$ enthält genau zwei Elemente $\Leftrightarrow r_1 + r_2 > |M_1M_2|$ oder $|r_1 - r_2| < |M_1M_2|$.

Fall 1: $r_1 + r_2 > |M_1M_2|$



Fall 2: $|r_1 - r_2| < |M_1M_2|$



– **Möglichkeit 4:** $k_1 \cap k_2$ enthält unendlich viele Elemente $\Leftrightarrow r_1 = r_2$ und $M_1 = M_2$.

3. $T(n)$ sei die Menge aller Teiler der natürlichen Zahl n. So ist z.B. $T(4) = \{1, 2, 4\}$, denn 1, 2 und 4 sind Teiler von 4. Geben Sie das kartesische $T(10) \times T(6)$ in aufzählender Form an.

   Lösung: Nach Definition von $T(n)$ gilt: $T(10) = \{1, 2, 5, 10\}$ und $T(6) = \{1, 2, 3, 6\}$. Demnach ist das gesuchte kartesiche Produkt: $T(10) \times T(6) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 6), (10, 1), (10, 2), (10, 3), (10, 6)\}$.

4. Kann das kartesische Produkt zweier Mengen A und B aus genau 7 geordneten Paaren (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ bestehen?

   Lösung: Wenn A, B endliche Mengen sind, die aus m bzw. n Elementen bestehen, dann besteht $A \times B$ aus $m \cdot n$ Elementen. Damit kann das kartesische Produkt zweier Mengen A und B aus genau 7 Elementen bestehen, und zwar dann wenn $m = 1$ und $n = 7$ bzw. $m = 7$ und $n = 1$.