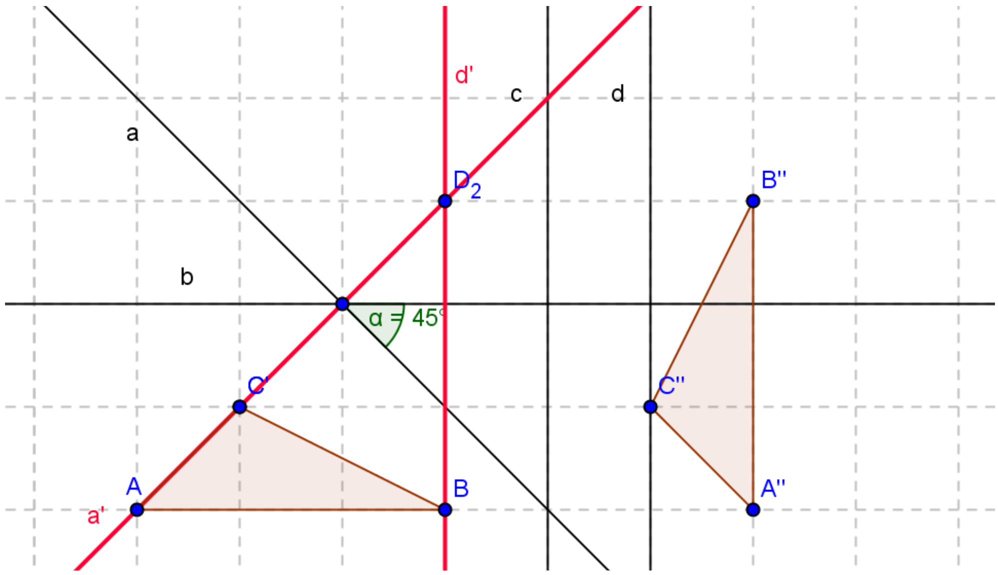
Aufgabe 1: Definieren

Nr.	Aufgabe	Punkte	
a)	Geben Sie eine formal korrekte Konventionaldefinition des Begriffs *gleichschenkliges Trapez* an. **Wenn ein Trapez eine Symmetrieachse besitzt, die nicht auf einer der Diagonalen des Trapezes liegt, dann heißt das Trapez gleichschenkliges Trapez**	2	
b)	Definieren Sie den Begriff *Parallelogramm* unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften des Parallelogramms. **Ein punktsymmetrisches Viereck ist ein Parallelogramm**	2	
c)	Was versteht man unter einer *Schubspiegelung*? Definieren Sie formal korrekt. **Eine Verkettung dreier Geradenspiegelungen** $S_a \circ S_b \circ S_c$ **mit** $a \parallel b$ **und** $a \perp c$ **nennt man Schubspiegelung**	2	
d)	Definieren Sie den Begriff *Punktspiegelung*, ohne auf die Verkettung von Geradenspiegelungen einzugehen. **Eine Drehung mit dem Drehwinkel 180 heißt Punktspiegelung**	2	
e)	Nennen Sie zwei Eigenschaften der Geradenspiegelung, die im Allgemeinen nicht für eine Drehung gelten. Eigenschaft 1: **nicht richtungssinnerhaltend** Eigenschaft 2: **besitzt eine Fixpunktgerade**	2	
f)	Geben Sie eine formal korrekte Definition für die Halbgerade AB^- an. $AB^- = \{P \mid Zw(P,A,B)\} \cup \{A\}$	2	

Aufgabe 2: Konstruieren, Argumentieren, Begründen, Beweisen

Nr.	Aufgabe	Punkte	
	Gegeben sei ein Dreieck $\overline{ABC}$ und die Geraden *a*, *b*, *c* und *d* mit: $\lvert\prec a,b\rvert = \alpha = 45$ *und* $c \parallel d$ entsprechend der Skizze.  		
a)	Durch welche Abbildung kann die Verkettung der vier Geradenspiegelungen $S_a \circ S_b \circ S_c \circ S_d$ ersetzt werden (Begründen Sie Ihre Entscheidung)? *1)* $S_a \circ S_b = S_{a'} \circ S_{b'}$ *mit* $\lvert\prec a',b'\rvert = 45$ *und* $b' \parallel c'$ *Eigenschaft* *Drehung* *und gleichem Drehpunkt* *2)* $S_c \circ S_d = S_{c'} \circ S_{d'}$ *mit* $c' \equiv b' \wedge c' \parallel c$ *Eigenschaft Verschiebung* *3)* $S_a \circ S_b \circ S_c \circ S_d = S_{a'} \circ S_{b'} \circ S_{c'} \circ S_{d'} = S_{a'} \circ S_{d'}$ *1), 2), Stufenwinkelsatz* *mit* $\lvert\prec a',d'\rvert = 45$ *und neuem Drehpunkt* D_2 *4) Ersatzabbildung: Drehung(*D_2*,90)* *3)*	6	
b)	Zeichnen Sie die Achsen der Ersatzabbildung in die Skizze oben ein. Hinweis: Sie dürfen das Gitter im Hintergrund als Orientierung nutzen.	2	
c)	Konstruieren Sie oben in der Skizze das Bild des Dreiecks $\overline{ABC}$, das nach der Verkettung $S_a \circ S_b \circ S_c \circ S_d$ entsteht, mit Hilfe der Ersatzabbildung.	3	
d)	Beweisen Sie die Streckentreue der Geradenspiegelung mit Hilfe der Zwischenrelation. Vor.: $S_g(\overline{AB})$ *mit* $P \in \overline{AB}$, $S_g(A) = A' \wedge S_g(B) = B'$ Beh.: $P' \in \overline{A'B'}$ Beweis: *1)* $P \in \overline{AB}$ *Vor.* *2) Zw(A,P,B)* *1), Def. Strecke* *3)* $\lvert AP\rvert + \lvert PB\rvert = \lvert AB\rvert$ *2), Def. Zw.* 4) $\lvert A'P'\rvert + \lvert P'B'\rvert = \lvert A'B'\rvert$ *3), Abstandserhaltung* *5) Zw(A',P',B')* *4), Def. Zw.*	4	

	6) $P' \in \overline{A'B'}$	*5), Def. Strecke*		

Aufgabe 3: Kriterien

Nr.	Aufgabe	Punkte	
a)	Definieren Sie den Begriff *Drachen* nur aufgrund seiner Seiteneigenschaften und mit Hilfe des Oberbegriffs Viereck. **Definition 1:** Ein Viereck $\overline{ABCD}$ mit $\overline{AB} \cong \overline{AD} \wedge \overline{BC} \cong \overline{DC}$ heißt Drachen	2	
b)	Außer dass eine Diagonale eines Drachens auf einer Symmetrieachse liegt, gibt es noch zwei andere Eigenschaften, die jeweils die Beziehung der Diagonalen zueinander näher beschreiben. Nennen Sie diese Eigenschaften der Diagonalen im Drachen: Eigenschaft **E1**: Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander Eigenschaft **E2**:eine Diagonale halbiert die andere	2	
c)	**Satz 3a**: Wenn $\overline{ABCD}$ ein Drachen entsprechend **Definition 1** ist, dann hat $\overline{ABCD}$ die Eigenschaft **E1**. Beweisen Sie **Satz 3a** (auf der nachfolgenden Seite). Als Voraussetzung dürfen Sie nur **Definition 1** verwenden.	4	
d)	**Satz 3b**: Wenn $\overline{ABCD}$ ein Drachen entsprechend **Definition 1** ist, dann hat $\overline{ABCD}$ die Eigenschaft **E2**. Beweisen Sie **Satz 3b** (auf der nachfolgenden Seite). Als Voraussetzung dürfen Sie nur **Definition 1** verwenden.	4	
e)	Ebenso wie die Sätze 3a und 3b gilt der folgende Satz. **Satz 3c**: Wenn ein Viereck den Eigenschaften **E1** und **E2** genügt, dann ist das Viereck ein Drachen. Formulieren Sie auf der Grundlage von 3a, 3b und 3c ein Drachenkriterium (Die Eigenschaften E1-E2 sind dabei auszuformulieren). Genau dann, wenn in einem Viereck die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen und die eine Diagonale die andere halbiert, heißt das Viereck Drachen.	3	

Beweise 3a-3b:

3a)

Vor.: Viereck $\overline{ABCD}$ mit $\overline{AB} \cong \overline{AD} \wedge \overline{BC} \cong \overline{DC}$

Beh.: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

Beweis:

1)	$\overline{AB} \cong \overline{AD}$	Vor.
2)	$A \in$ Mittelsenkr. von $\overline{BD}$	1), Mittelsenkrechtenkriterium
3)	$\overline{BC} \cong \overline{DC}$	
4)	$C \in$ Mittelsenkr. von $\overline{BD}$	3), Mittelsenkrechtenkriterium
5)	AC ist Mittelsenkr. von $\overline{BD}$	2), 4)
6)	$\overline{AC} \perp \overline{BD}$	5), Def. Mittelsenkr.

3b)

Vor.: Viereck $\overline{ABCD}$ mit $\overline{AB} \cong \overline{AD} \wedge \overline{BC} \cong \overline{DC}$

Beh.: $\overline{AC}$ halbiert $\overline{BD}$

Beweis:

1)	AC ist Mittelsenkr. von $\overline{BD}$	Vor., Beweis aus 3a
2)	$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{S\}$	1), Def. Mittelsenkrechte
3)	$\lvert DS \rvert = \lvert SB \rvert$	1), 2), Def. Mittelsenkrechte
4)	$\overline{AC}$ halbiert $\overline{BD}$	3)

Aufgabe 4: Beweise vervollständigen

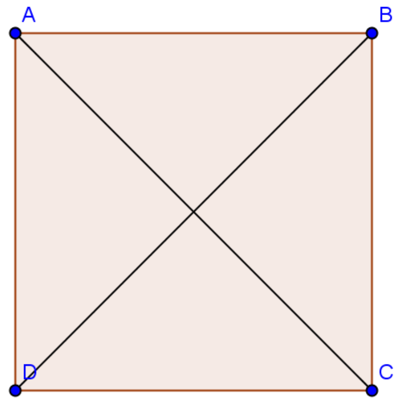
Ergänzen Sie nachfolgend den Beweisausschnitt zu folgendem Satz:
Satz über die Innenwinkel im Quadrat: Alle Innenwinkel im Quadrat sind rechte Winkel.

Beweis:

Vor. $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$ und $|\angle CDA| = 90$ [1]

Beh. *alle Innenwinkel im Quadrat sind rechte Winkel* [1]

Beweis:
Anmerkung: Der folgende Beweis bezieht sich auf die nebenstehende Skizze:



Beweisschritt		**Begründung**	**Punkte**
1.	$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$	Voraussetzung	0,5
2.	$\lvert\angle CDA\rvert = 90$	Voraussetzung	0,5
3.	$A \in Mittelsenkrechten \quad von \quad \overline{BD}$	1.), Mittelsenkrechtenkriterium	1
4.	$C \in Mittelsenkrechten \quad von \quad \overline{BD}$	1.), Mittelsenkrechtenkriterium	1
5.	$\overline{AC} \perp \overline{BD}$	3.), 4.)	1
6.	$D' = S_{AC}(D)$ mit $D' \in DB$	5.), Def. Geradenspiegelung	1
7.	$\lvert\angle CDA\rvert = \lvert\angle CD'A\rvert = 90$	2.), 6.), Winkeltreue der Geradensp.	1,5
8.	$\lvert CD'\rvert = \lvert CB\rvert$	1.), Längentreue der Geradensp.	1
9.	$\lvert AD'\rvert = \lvert AB\rvert$	1.), Längentreue der Geradensp.	1
10.	$\lvert AC\rvert = \lvert AC\rvert$	trivial	0,5
11.	$\overline{ACD'} \cong \overline{ACB}$	8.), 9.), 10.), SSS	2
12.	$\lvert\angle CD'A\rvert = \lvert\angle CBA\rvert = 90$	7.), 11.)	1
… auf die noch folgenden weiteren Beweisschritte wird aus Zeitgründen hier verzichtet!			

Auswertung:

Punkte	Note		Punkte	Note
56	1		27	4,5
55	1		26	4,5
54	1		25	4,5
53	1		24	4,5
52	1		23	4,5
51	1,5		22	4,5
50	1,5		21	4,5
49	1,5		20	5
48	1,5		19	5
47	2		18	5
46	2		17	5
45	2		16	5
44	2		15	5
43	2,5		14	5
42	2,5		13	5,5
41	2,5		12	5,5
40	2,5		11	5,5
39	3		10	5,5
38	3		9	5,5
37	3		8	5,5
36	3		7	5,5
35	3,5		6	6
34	3,5		5	6
33	3,5		4	6
32	3,5		3	6
31	4		2	6
30	4		1	6
29	4		0	6
28	4			

Erreichte Punkte	Note