Übungsaufgaben Einführung in die Geometrie, mathematische Grundlagen II, Serie 5 SoSe 2013

Gieding

27.05.2013 - 02.06.2013

Aufgabe 5.01

Wir betrachten das folgende Modell $\mathbb{M} := (\mathbb{P}, \mathbb{G}, \mathrm{inz})$ für die Inzidenzgeometrie:
Modellpunkte $\mathbb{P}$:
$\mathbb{P} := \{A, B, C, D\}$
Modellgeraden $\mathbb{G}$:
$\mathbb{G} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}\}$
Inzidenz inz:
Elementbeziehung: Ein Punkt P inzidiert mit einer Geraden g , wenn er zu g gehört: $P \,\mathrm{inz}\, g :\Leftrightarrow P \in g$

a) Warum ist $\mathbb{M}$ kein Modell für die ebene Inzidenzgeometrie?

b) Ergänzen Sie $\mathbb{M}$ derart, dass alle Axiome der ebenen Inzidenz erfüllt sind.

Aufgabe 5.02

Die Axiome eines Axiomensystems sollen unabhängig voneinander sein. Was versteht man darunter?

Aufgabe 5.03

Die Axiome eines Axiomensystems sollen widerspruchsfrei sein. Was versteht man darunter?

Aufgabe 5.04

Satz I: Je drei nicht kollineare Punkte sind paarweise verschieden.

1. Wir formulieren Satz I neu und beginnen mit
   „Es seien A, B und C drei Punkte.“ Ergänzen Sie:
   „Wenn A,B und C . . . , dann . . ..“

2. Beweisen Sie Satz I indirekt mit Widerspruch.
3. Bilden Sie die Kontraposition von Satz I.
4. Beweisen Sie auch die Kontraposition von Satz I.
5. Formulieren Sie die Umkehrung von Satz I.
6. Gilt auch die Umkehrung von Satz I?

Aufgabe 5.05

Beweisen Sie Satz I.6: Eine Ebene und eine nicht in ihr liegende Gerade haben höchstens einen Punkt gemeinsam.

Aufgabe 5.06

Definieren Sie den Begriff der Komplanarität für Punkte. Ab wieviel Punkte macht der Begriff Sinn? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5.07

Man muß jederzeit an Stelle von „Punkten", „Geraden", „Ebenen", „Tische", „Stühle", „Bierseidel" sagen können.
David Hilbert (1862-1943)

Interpretieren Sie die Aussage von Hilbert bezüglich der axiomatischen Geometrie. Hinweis: Der Begriff des Modells hilft.

Aufgabe 5.08

Wir schreiben das Jahr 2022. Sie sind eine gestandene Mathematiklehrerin bzw. ein gestandener Mathematiklehrer. Das Blatt hat sich inzwischen gewendet und die Erleichterungspädagogik (Du magst keine Mathematik, dann sing doch ein Lied, du kannst kein Lied singen, dann bau doch einen Turm, du kannst keinen Turm bauen, dann streichle doch einen Esel, du traust dich nicht einen Esel zu streicheln, .. ist doch egal du bist so autistisch quatsch authentisch ...) ist nicht mehr gesellschaftsfähig. Stattdessen haben Hardcoremathematiker aus China bezüglich des deutschen Mathematikunterrichts das Sagen. Die Lehrmittelverlage (die Pharmaindustrie der Bildung) freuen sich und produzieren neuen Content (hard und soft/ Hauptsache es bringt Geld). Ein Außendienstler von KlättKotza (Die Namenswahl ist zufällig und hat nichts mit existierenden Lehrmittelverlagen zu tun. Ähnlichkeiten sind auch nicht beabsichtigt.) erscheint bei Ihnen und möchte Ihnen einen Schülersatz Modelle für die räumliche Inzidenzgeometrie verkaufen: "Schauen Sie mal da hätten wir jeweils drei Flummis als Modellpunkte für die räumliche Inzidenzgeometrie, die können Sie dann auf diese 2 Schaschlikstäbchen, die Modellgeraden stecken. Schüler lieben Flummis und Schaschlik. Natürlich enthalten unsere Flummis krebserregende Weichmacher (da sind wir ganz ehrlich), die entweichen jedoch erst in 123 Jahren. Wenn Sie 10 Klassensätze kaufen, bekommen Sie den 12. umsonst und 10 Gratisexamplare von unserer Firmenzeitschrift „Die Welt von KlättKotza"."

a) Nenne Sie zwei ethisch/moralische Gründe, warum Sie nicht bei dem Außendienstler von KlättKotza kaufen.

b) Nenne Sie zwei Gründe aus der Sicht der Fachwissenschaft Mathematik, warum Sie nicht bei dem Außendienstler von KlättKotza kaufen.

c) Nenne Sie zwei Gründe aus der Sicht der Didaktik des Faches Mathematik, warum Sie nicht bei dem Außendienstler von KlättKotza kaufen.

Aufgabe 5.09

Mario: Jede Gerade hat unendlich viele Punkte.
Marion: Das folgt jedoch nicht aus den Axiomen der Inzidenzgeometrie.
Wer hat Recht? Begründen Sie Ihre Meinung.

Aufgabe 5.10

Es seien A, B, C, D vier paarweise verschiedene Punkte.
Beweisen Sie:
nKomp$(A, B, C, D) \Rightarrow$ nKoll(A, B, C).