Dr. Michael Gieding

EINFÜHRUNG IN DIE GEOMETRIE

MATERIAL FÜR DAS SELBSSTUDIUM

WICHTIGE GRUNDBEGRIFFE DER MATHEMATIK: MENGEN UND RELATIONEN

MENGEN

0. Mengen

0.0 Ziel der Ausführungen

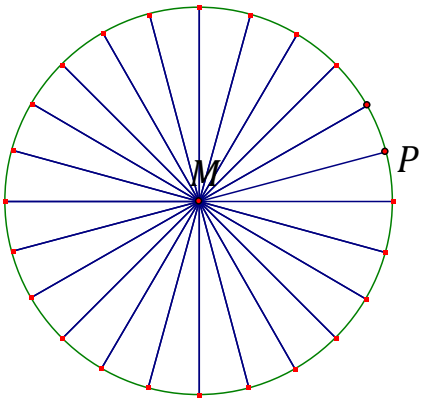
Die Mengenlehre bildet die Grundlage für verschiedenste Teilgebiete der Mathematik. Es gab Zeiten, da man meinte, auch in der Schule diesen Umstand zu verdeutlichen und die Mengenlehre explizit zu behandeln. Von diesen übertriebenen Vorstellungen ist man weitestgehend geheilt. Trotzdem bleibt die Mengenlehre wesentliche Grundlage nicht nur des Geometrieunterrichtes. Aus diesem Grund werden hier Grundzüge der Mengenlehre wiederholt, die weitestgehend aus der Schule bekannt sein dürften.

0.1 Beispiele für die Verwendung von Mengen im Geometrieunterricht

0.1.1 Kreise

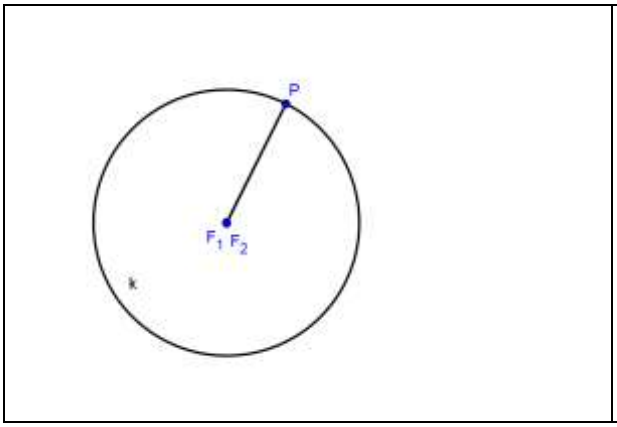
Jeder Kreis ist eine Menge von Punkten. Diese Punkte haben die Eigenschaft, dass sie alle in ein und derselben Ebene liegen und zu einem gegebenen Punkt dieser Ebene ein und denselben Abstand haben.

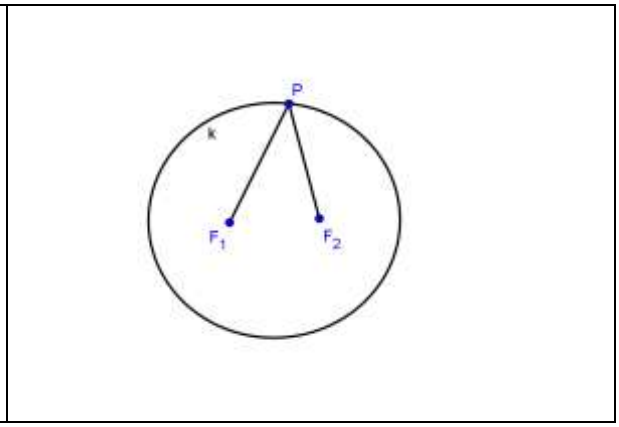
n	m $\overline{MP}$
0	3,41 cm
1	3,41 cm
2	3,41 cm
3	3,41 cm
4	3,41 cm
5	3,41 cm
6	3,41 cm
7	3,41 cm
8	3,41 cm
9	3,41 cm
10	3,41 cm
11	3,41 cm
12	3,41 cm
13	3,41 cm
14	3,41 cm
15	3,41 cm
16	3,41 cm
17	3,41 cm
18	3,41 cm
...	...
22	3,41 cm



0.1.2 Ellipsen

Wir stellen uns vor, dass der Mittelpunkt F_1 des Kreises k mit dem Punkt F_2. zusammenfällt. Es sei nun P ein beliebiger Punkt des Kreises k. Es gilt $|F_1P| + |F_2P| = 2|r|$, wobei $|r|$ die Länge eines beliebigen Radius von k ist. Jetzt wählen wir F_2 derart, dass er nicht mehr mit F_1 zusammenfällt, die Bedingung $|F_1P| + |F_2P| = 2|r|$ aber erhalten bleibt. Die Menge aller Punkte der Ebene, die dieser Bedingung genügen bilden eine Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2. Die Menge aller Kreise ist damit die Menge aller Ellipsen, deren Brennpunkte zusammenfallen. Anders ausgedrückt: Die Menge aller Kreise ist eine echte Teilmenge der Menge aller Ellipsen.





0.2 Grundlegende Ideen der Mengenlehre

0.2.1 Begriff der Menge

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente genannt werden) zu einem Ganzen.

0.2.2 Prinzip der Mengenbildung

Für alle diejenigen Objekte x, auf die eine gegebene Aussageform $H(x)$ zutrifft, gibt es stets eine Menge M, die genau jene x als Elemente besitzt.

0.2.3 Prinzip der Mengengleichheit

Zwei Mengen M und N sind genau dann gleich, wenn sie aus denselben Elementen bestehen.

0.3 Benennung von Mengen

0.3.1 Mengenschreibweisen

Mengen werden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet: M, N, R.

Die Objekte, aus denen eine Menge M besteht, werden Elemente der Menge M genannt. Man bezeichnet diese mit kleinen lateinischen Buchstaben: x, y, z.

Kurzschreibweisen:

$a \in M$	a ist ein Element der Menge M, a gehört zur Menge M
$a \notin M$	a ist kein Element der Menge M, a gehört nicht zu M
$M = \{a, b, c, \cdots\}$	Die Menge M besteht aus den Elementen a, b, c ...
$M = \{x \mid H(x)\}$	Die Menge M besteht aus allen Elementen, für die die Aussageform $H(x)$zutrifft.

0.3.2 Beispiele für Mengenschreibweisen

0.3.2.1 Menge aller Teiler der natürlichen Zahl 36

Mit T_{36} soll die Menge aller natürlichen Zahlen bezeichnet sein, die 36 teilen. Folgende Schreibweisen sind u.a. möglich:

$T_{36} = \{1, 2,3,4,6,9,12,18,36\}$

$T_{36} = \{n | n \in \mathbb{N} \wedge \exists m \in \mathbb{N}: n \cdot m = 36\}$

$T_{36} = \{n | n/36\}$

$1 \in T_{36}, 2 \in T_{36}, 3 \in T_{36}, 4 \in T_{36}, 8 \notin T_{36},$

0.3.2.2 Einheitskugel in Mittelpunktslage

Von der Mittelpunktslage einer Kugel k spricht man dann, wenn der Mittelpunkt der Kugel mit dem Ursprung des gewählten Koordinatensystems zusammenfällt. Hat eine Kugel den Radius 1, so spricht man von einer Einheitskugel. Eine Einheitskugel k in Mittelpunktslage lässt sich wie folgt als Punktmenge schreiben:

$k = \{(x_p, y_p, z_p) | (x_p, y_p, z_p) \in \mathbb{R}^3 \wedge x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 = r^2\}$

0.4 Teilmengen

0.4.1 Definitionen

Definition 1.1: (Teilmenge)

Es seien T und M zwei Mengen. Wenn jedes Element von T auch Element von M ist, so ist T eine Teilmenge von M. Schreibweise: $T \subseteq M$

Definition 1.2: (Identität von Mengen)

Wenn die Menge T eine Teilmenge der Menge M und die Menge M eine Teilmenge der Menge T ist, so sind die beiden Mengen T und M identisch.

Schreibweise: $T \equiv M$ oder auch $T = M$.

Unmittelbar einsichtig ist der folgende Satz:

Satz 1.1:

Jede Menge M ist eine Teilmenge von sich selbst: $M \subseteq M$.

Definition 1.3: (leere Menge)

Die Menge L die kein Element enthält, heißt die leere Menge.

Schreibweise: $L = \emptyset$ oder $L = \{\}$.

Die leere Menge ist Teilmenge einer jeden anderen Menge.

Definition 1.4: (echte Teilmenge)

Eine Teilmenge T von M, die nicht identisch zu M und nicht die leere Menge ist, heißt echte Teilmenge von M. Schreibweise: $T \subset M$.

0.4.2 Beispiele für Teilmengen

0.4.2.1 Gerade Zahlen

Die Menge der geraden Zahlen $2\mathbb{N}$ ist eine echte Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$: $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$.

0.4.2.2 Kreis als echte Teilmenge der Punkte einer Ebene

Es sei $\mathcal{E}$ die Menge aller Punkte der Ebene. Ferner sei M ein ausgewählter Punkt der Ebene $\mathcal{E}$ und r eine feste positive reelle Zahl. Unter k möge die folgende Punktmenge verstanden werden:$k = \{P/P \in \mathcal{E},\ |PM| = r\}$. Wegen $P \in \mathcal{E}$ für alle $P \in k$ gilt zwangsläufig $k \subseteq \mathcal{E}$. Da nicht alle $P \in \mathcal{E}$ die Eigenschaft $|PM| = r$ erfüllen, dürfen wir $k \subset \mathcal{E}$ schreiben.

0.5 Potenzmengen

0.5.1 Begriffsdefinition

Definition 1.5: (Potenzmenge)

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M ist die Potenzmenge von M.
Schreibweise: $\mathcal{P}(M)$

0.5.2 Beispiele

0.5.2.1 Potenzmenge einer Menge mit drei Elementen

$M = \{a,\ b,\ c\}$

$\mathcal{P}(M) = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

0.5.2.2 Potenzmenge der leeren Menge

$\mathcal{P}(\{\quad\}) = \{\quad\}$

0.6 Boolsche Operationen

0.6.1 Schnittmengen

Definition 1.6: (Schnittmenge oder Durchschnitt)

Die Menge aller Elemente, die sowohl zu einer Menge M_1 als auch zu einer Menge M_2 gehören, heißt der Durchschnitt oder die Schnittmenge der Mengen M_1und M_2.
In Zeichen: $M_1 \cap M_2 = \{x|x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$

Definition 1.7: (Disjunktheit zweier Mengen)

Falls der Durchschnitt zweier Mengen M_1 und M_2 die leere Menge ist, so heißen die beiden Mengen disjunkt zueinander.

0.6.2 Beispiele für Schnittmengen

0.6.2.1 $6\mathbb{Z}$ als Schnittmenge von $2\mathbb{Z}$ und $3\mathbb{Z}$

Mit $2\mathbb{Z}$ und $3\mathbb{Z}$ seien die durch 2 bzw. die durch 3 teilbaren ganzen Zahlen bezeichnet. Die Schnittmenge dieser beiden Mengen sind alle ganzen Zahlen, die sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar sind:

$2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{z|z \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}: 2 \cdot q = z \wedge \exists p \in \mathbb{Z}: 3 \cdot q = z\}$ oder

$2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{\ldots -18,\ -12,\ -6,\ 0,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18\}$ oder

$2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$, wobei unter $6\mathbb{Z}$ die Menge der durch 6 teilbaren ganzen Zahlen zu verstehen ist.

0.6.2.2 Sekante Tangente und Passante bezüglich eines Kreises k

In der Ebene $\mathcal{E}$ seien eine Gerade g und ein Kreis k gegeben. Bezüglich der gemeinsamen Punkte von g und k existieren jetzt die folgenden drei Möglichkeiten:

$g \cap k = \emptyset$, die Gerade g ist bezüglich des Kreises k eine Passante,

Der Durchschnitt von g und k besteht aus genau einem Punkt T. In diesem Fall heißt g Tangente an k mit dem Berührungspunkt T.

Der Durchschnitt von g und k besteht aus genau zwei Punkten S_1 und S_2. Die Gerade g ist eine Sekante des Kreises k.

0.6.2.3 Die Menge der Quadrate als Schnitt der Menge aller Rechtecke mit der Menge aller Rauten

Ein Quadrat ist ein Rechteck, bei dem alle Seiten ein und dieselbe Länge haben.

Andererseits ist ein Quadrat eine Raute mit rechten Innenwinkeln.

Dementsprechend können wir Quadrat auch als ein Viereck auffassen, das sowohl Raute als auch Rechteck ist. Es sei Q die Menge aller Quadrate, R_e die Menge aller Rechtecke und R_a die Menge aller Rauten. Es gilt: $Q = R_e \cap R_a$.

0.6.2.4 Die Schnitt der Menge der Drachen mit der Menge der Rechtecke

Drachen sind Vierecke, die durch Spiegelung an einer ihrer Diagonalen auf sich selbst abgebildet werden. Rechtecke werden durch Spiegelung an einer ihrer Diagonalen nur dann auf sich selbst abgebildet, wenn sie Quadrate sind. Der Schnitt der Drachen mit den Rechtecken ist somit die Menge aller Quadrate.

0.6.2.5 Kegelschnitte

Es sei k ein Doppelkegel und $\mathcal{E}$ eine Ebene, deren Schnittmenge mit k nicht leer ist. Die möglichen Schnittmengen von k mit $\mathcal{E}$ lassen sich wie folgt spezifizieren:

Die Spitze des Doppelkegels ist Element der Ebene $\mathcal{E}$:

Die Schnittmenge ist ein Paar sich schneidender Geraden oder

die Schnittmenge ist die Spitze des Doppelkegels.

Die Spitze des Doppelkegels ist nicht Element von $\mathcal{E}$:

Die Schnittmenge ist ein Kreis oder

die Schnittmenge ist eine Ellipse

die Schnittmenge ist eine Parabel oder

die Schnittmenge ist eine Hyperbel.

0.6.3 Vereinigungsmengen

Definition 1.8: (Vereinigungsmenge)

Es seien M_1 und M_2 zwei Mengen. Unter der Vereinigungsmenge der beiden Mengen M_1 und M_2 versteht man alle Elemente, die zu M_1 oder M_2 gehören: $M_1 \cup M_2 := \{e | e \in M_1 \vee e \in M_2\}$.

0.6.4 Beispiele für Vereinigungsmengen

0.6.4.1 Dreieck als Vereinigungsmenge von drei Strecken

Es seien A, B und C drei jeweils paarweise verschiedene Punkte, die nicht alle auf ein und derselben Geraden liegen. Unter dem Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C versteht man die folgende Vereinigungsmenge:

$\overline{ABC} := \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$ bzw. $\overline{ABC} := \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}\}$

0.6.4.2 Halbgeraden

Es seien g eine Gerade und A und B zwei Punkte von g. A teilt die Gerade g in genau zwei Halbgeraden (Strahlen) AB^+ und AB^-, wobei diese wie folgt definiert sind:

$AB^+ := \{A\} \cup \{B\} \cup \{P|\ P \text{ liegt zwischen } A \text{ und } B\} \cup \{Q|\ B \text{ liegt zwischen } A \text{ und } Q\}$,

$AB^- := \{A\} \cup \{P|\ A \text{ liegt zwischen } P \text{ und } B\}$.

0.7 Kreuzprodukt bzw. kartesisches Produkt zweier Mengen

0.7.1 Geordnete Paare und n-Tupel

0.7.1.1 Begriff des geordneten Paares

Im Rahmen der vorliegenden Ausführungen ist es nicht möglich und nötig, eine exakte Definition des Begriffs geordnetes Paar bzw. geordnetes n-Tupel anzugeben.

Unter einem geordneten Paar versteht man eine Zusammenfassung von zwei Objekten a und b, bei der die Reihenfolge der beiden Objekte relevant ist. Geschrieben werden geordnete Paare in runden Klammern: (a, b). Im Gegensatz zu $\{a, b\} = \{b, a\}$ gilt wegen der Relevanz der Reihenfolge im Allgemeinen $(a, b) \neq (b, a)$.

Unter einem n-Tupel versteht man eine entsprechende Zusammenfassung von n Objekten, wobei die Reihenfolge dieser Objekte von Bedeutung ist.

0.7.1.2 Beispiele für geordnete Paare und n-Tupel

Koordinaten in der reellen Zahlenebene:

Der Punkt P habe die Koordinaten $(5{,}3)$. Er ist verschieden vom Punkt Q mit den Koordinaten $(3{,}5)$.

Koordinaten im Raum:

Räumliche Koordinaten werden durch geordnete Tripel (3-Tupel) reeller Zahlen angeben.

0.7.2 Kreuzprodukte bzw. kartesische Produkte

0.7.2.1 Definition

Definition 1.9: (Kreuzprodukt zweier Mengen)

Gegeben seien zwei Mengen A und B. Die Menge aller geordneten Paare, die sich aus den Elementen der Mengen A und B bilden lassen, heißt kartesisches oder Kreuzprodukt der Mengen A und B: $A \times B := \{(a, b)|a \in A \wedge b \in B\}$.

Bemerkung:

Das kartesische Produkt kann auch aus mehr als zwei Mengen gebildet werden: $M_1 \times M_2 \times M_3 \times \cdots \times M_n :=$

$\{(e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n) | e_1 \in M_1 \wedge e_2 \in M_2 \wedge e_3 \in M_3 \wedge \cdots \wedge e_n \in M_n\}$

In diesem Fall besteht das Kreuzprodukt der n Mengen aus geordneten n-Tupeln.

0.7.2.2 Ein formales Beispiel für das kartesische Produkt zweier Mengen

$A = \{a, b, c, d\},\ B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$A \times B =$
$\{(a, \alpha), (a, \beta), (a, \gamma), (b, \alpha), (b, \beta), (b, \gamma), (c, \alpha), (c, \beta), (c, \gamma), (d, \alpha), (d, \beta), (d, \gamma)\}$

$B \times A =$
$\{(\alpha, a), (\alpha, b)(\alpha, c), (\alpha, d), (\beta, a), (\beta, b)(\beta, c), (\beta, d), (\gamma, a), (\gamma, b)(\gamma, c), (\gamma, d)\}$

Man sieht leicht, dass die Bildung des Kreuzproduktes zweier Mengen ist nicht kommutativ ist.