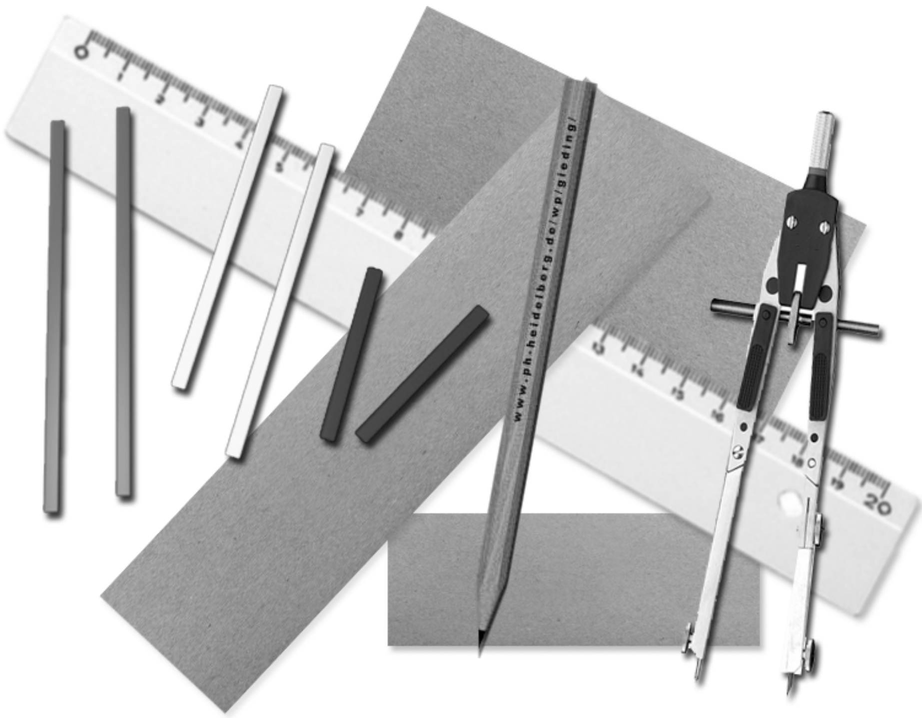
PH Heidelberg, Fach Mathematik

Klausur zur Akademischen Teilprüfung, Modul 2,

GHPO I vom 22.7.2003, RPO vom 24.08.2003



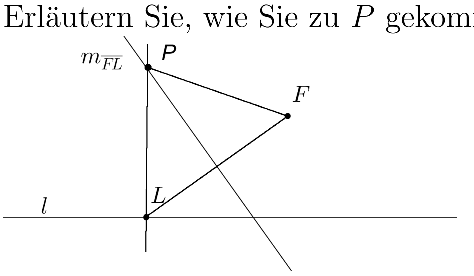
Einführung in die Geometrie

Wintersemester 12/13, 12. Februar 2013

Aufgabe 1: Definieren

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
a)	Definieren Sie den Begriff Nebenwinkel. `Zwei Winkel sind Nebenwinkel, wenn Sie einen Schenkel gemeinsam haben und ihre anderen Schenkel eine Gerade bilden.`	3	
b)	Es seien SA^+ und SB^+ zwei verschiedene Halbgeraden. Jemand definiert $M := \{P \mid P \in SA, B^+ \wedge P \in SB, A^+\}$. Was wurde mit Menge M definiert? Es wurde das Innere des Winkels $\angle ASB$ definiert.	2	
c)	*Scheitelwinkel* haben die Eigenschaft kongruent zueinander zu sein. Ist diese Eigenschaft *hinreichend*, *notwendig* oder *hinreichend und notwendig* dafür, dass zwei Winkel *Scheitelwinkel* sind. Begründen Sie Ihre Antwort. (Skizzen sind zur Begründung zulässig.) `Weil alle Scheitelwinkel kongruent zueinander sind, ist die Bedingung notwendig dafür, dass zwei gegebene Winkel ein Paar von Scheitelwinkeln bilden. Sie ist jedoch nicht hinreichend. Es gibt Winkel, die zwar kongruent sind jedoch kein Paar von Scheitelwinkeln bilden.`	2	
d)	Formulieren Sie eine Konventionaldefinition des Begriffs *Tangente an einen Kreis*. Wenn eine Gerade t genau einen Punkt mit dem Kreis k gemeinsam hat und mit k in ein und derselben Ebene liegt, dann ist t eine Tangente an k.	3	
e)	Es sei ε eine Ebene in unserem Raum R. Der Punkt Q möge nicht zu ε gehören. Definieren Sie *Halbraum* $\varepsilon Q^- := \left\{P \mid \overline{PQ} \cap \varepsilon \neq \emptyset\right\}$	2	
f)	Warum ist es sinnlos, den Begriff Sehnendreieck zu definieren? `Weil alle Dreiecke einen Umkreis haben und damit Sehnendreiecke sind.`	1	
g)	Es seien A und B zwei verschiedene Punkte. Der Begriff AB^- sei bereits definiert. Definieren Sie unter expliziter Verwendung von AB^- den Begriff $AB^+ := AB \setminus AB^- \cup \{A\}$	2	
h)	Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Definieren Sie: α ist Zentriwinkel (Mittelpunktswinkel) von k. Ein Winkel, der den Mittelpunkt eines Kreises k zum Scheitel hat und mit k in ein und derselben Ebene liegt, heißt Zentriwinkel bzgl. k.	2	

Aufgabe 2: Argumentieren, Begründen, Beweisen

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
a)	M_1 sei die Menge aller gleichseitigen Dreiecke, M_2 die Menge aller gleichschenkligen Dreiecke. Begründen Sie $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. `Jedes gleichseitige Dreieck hat zwei gleichlange Seiten und ist damit auch ein gleichschenkliges Dreick. Die Menge der gleichseitigen Dreiecke ist somit eine Teilmenge der gleichschenkligen Dreiecke.`	1	
b)	Mit welchem Satz begründet man in der absoluten Geometrie, dass ein Dreieck keine zwei rechten Innenwinkel haben kann. `mit dem schwachen Außenwinkelsatz`	1	
c)	Es seien A, B, P drei paarweise verschiedene Punkte. Begründen Sie: $P \in AB^- \Rightarrow P \notin \overline{AB}$ Von drei paarweise verschiedenen Punkten kann maximal einer zwischen den anderen beiden liegen. Wenn P zu AB^- gehört, dann liegt A zwischen P und B. Wäre P Punkt der Strecke $\overline{AB}$ müsste er zwischen A und B liegen. Das ist nun aber nicht mehr möglich.	3	
d)	Satz I: Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann liegt der Mittelpunkt seines Umkreises auf einer seiner Seiten. Handelt es sich bei Satz I um den Satz des Thales? Begründen Sie Ihre Antwort. `Es handelt sich nicht um den Satz des Thales. Im Satz des Thales wird behauptet, dass ein Dreieck rechtwinklig ist, hier wird vorausgesetzt, dass das Dreieck rechtwinklig ist.`	2	
e)	Formulieren Sie die Kontrapostition von Satz I. `Wenn der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks nicht auf einer der Seiten dieses Dreiecks liegt, dann ist das Dreieck nicht rechtwinklig.`	2	
f)	Gegeben seien drei verschiedene Strecken a, b, c mit $\lvert a\rvert = \frac{3}{5}$, $\lvert b\rvert = \frac{2}{5}$ und $\lvert c\rvert = \pi$. Begründen Sie mit Hilfe eines Axioms, dass kein Dreieck existiert, das aus den drei Seiten a, b, c besteht. Nach der Dreiecksungleichung muss für jedes Dreieck gelten, dass die Summe der Längen zweier Seiten immer größer als die Länge der dritten Seite ist. Es gilt jedoch $\lvert a\rvert + \lvert b\rvert = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1 < \pi$.	2	
g)	Gegeben seien eine Gerade l, ein Punkt F außerhalb von l und ein Punkt L auf l (s. Abb. 00). Zeichnen Sie in die Abb. 00 einen Punkt P mit $\lvert Pl\rvert = \lvert PF\rvert$ ein. Erläutern Sie, wie Sie zu P gekommen sind und warum P existiert.  Senkrechte in L auf l (Existenz der Senkrechten) , Schnittpunkt P der Senkrechten mit $m_{\overline{LF}}$ hat nach dem Mittelsenkrechtenkriterium zu F und zu L denselben Abstand. $\lvert PL\rvert = \lvert Pl\rvert$ (wegen senkrecht auf l).	3	

Aufgabe 3: Kriterien

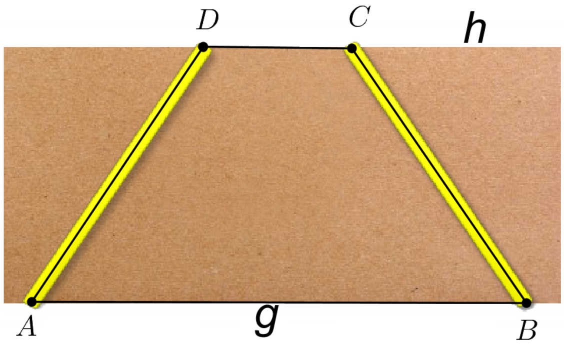


Abb. 01

Konstruktiver Begriffserwerb T_1:
Legt man auf einen Streifen (Paar paralleler Geraden g und h) Stäbchen gleicher Länge (Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ mit $\overline{AD} \cong \overline{BC}$) derart, dass A und B auf g und D und C auf h wie in Abbildung 1 zum Liegen kommen, dann erhält man ein gleichschenkliges Trapez $\overline{ABCD}$. Es sei dabei ferner vereinbart, dass die beiden Stäbchen nicht parallel sein dürfen, es sei denn, dass das Viereck $\overline{ABCD}$ ein Rechteck ist.

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
a)	Definieren Sie den Begriff gleichschenkliges Trapez, wie er sich entprechend T_1 unmittelbar ergibt. **Definition GST 1**: `Ein Trapez, das entweder ein Rechteck ist oder das ein Paar kongruenter gegenüberliegender Seiten hat, die nicht parallel sind, heißt gleichschenkliges Trapez.`	5	

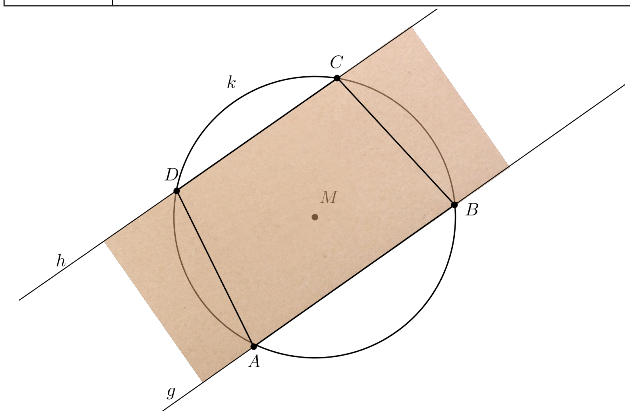


Abb. 02

Konstruktiver Begriffserwerb T_2:
Bringt man einen Streifen (Paar paralleler Geraden g und h) mit einem Kreis k entsprechend Abbildung 02 zum Schnitt entsteht offenbar auch ein gleichschenkliges Trapez.

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
b)	Formulieren Sie eine Konventionaldefinition für den Begriff gleichschenkliges Trapez, wie sie sich entprechend T_2 unmittelbar ergibt. **Definition GST 2**: `Wenn ein Trapez ein Sehnenviereck ist, dann ist es ein gleichschenkliges Trapez.`	3	

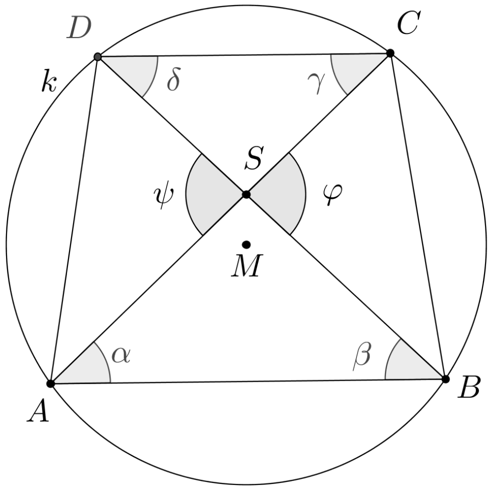


Abb. 03

Gegeben sei ein Viereck $\overline{ABCD}$ mit folgenden Eigenschaften:
V_1: $\overline{ABCD}$ hat einen Umkreis k mit Mittelpunkt M.
V_2: Ferner gelte $AB \parallel CD$.

Nr.	Aufgabe	Punkte.	
c)	Beweisen Sie mit Bezugnahme auf die Skizze aus Abbildung 03: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ Ergänzen Sie die Skizze in geeigneter Weise. Sie dürfen für den Beweis keine Sätze über die Eigenschaften von Vierecken verwenden. (I) $\alpha \cong \gamma$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) (II) $\beta \cong \delta$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) (III) $\alpha \cong \delta$ (Peripheriewinkel über derselben Sehne $\overline{BC}$) (IV) $\delta \cong \gamma$ ((I) und (III)) (V) $\overline{CS} \cong \overline{DS}$ ((IV) und Umkehrung Basiswinkelsatz) (VI) $\gamma \cong \beta$ (Peripheriewinkel über derselben Sehne $\overline{AD}$) (VII) $\alpha \cong \beta$ ((I) und (VI)) (VIII) $\overline{AS} \cong \overline{BS}$ ((VII) und Umkehrung Basiswinkelsatz) (IX) $\varphi \cong \psi$ (Scheitelwinkelsatz) (X) $\overline{ASD} \cong \overline{BSC}$ ((V), (VIII), (IX), SWS, Hertha BSC) (XI) $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ ((X) Dreieckskongruenz)	13	

d)	In den Teilaufgaben a) und b) haben Sie zwei verschiedene Definitionen **GST 1** und **GST 2** des Begriffs gleichschenkliges Trapez formuliert. Mit dem Beweis aus Teilaufgabe c) haben Sie prinzipiell gezeigt, dass aus einer dieser Definitionen die andere folgt. Aus welcher dieser Definitionen haben Sie welche abgeleitet?
	`Aus GST 2 folgt GST 1`
	
	Wir wollen davon ausgehen, dass Definition **GST 1** absolut korrekt ist. Was wäre noch zu tun, um sicher zu sein, dass die in **GST 2** verwendeten Eigenschaften für gleichschenklige Trapeze wirklich diesbezüglich definierende Eigenschaften sind?
	`Aus GST 1 folgt GST 2 wäre noch zu zeigen.`
		2	

Aufgabe 4: Beweisen wie die Schüler

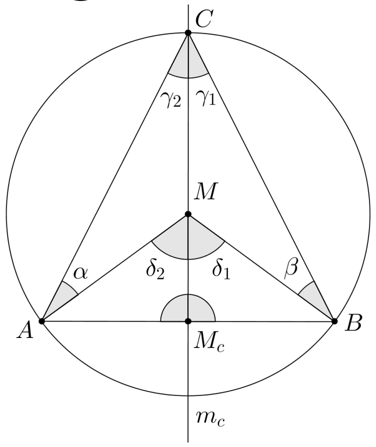


Abb. 04

Es sei $\overline{ABC}$ ein Dreieck mit dem Umkreis k. Der Punkt M sei der Mittelpunkt von k. Ferner sei m_c die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$. Entsprechend Abbildung 04 möge m_c durch den Punkt C gehen. Ergänzen Sie die folgende Beweisführung, die sich auf die Skizze aus Abbildung 05 bezieht.

Nr.	Beweisschritt	Begründung	Punkte	
(I)	$\overline{MA} \cong \overline{MB} \cong \overline{MC}$	Radien	1	
(II)	$M \in m_c$	(I), Mittelsenkrechtenkriterium	2	
(III)	$\lvert\angle AM_cM\rvert = \lvert BM_cM\rvert = 90°$	m_c ist Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ und steht laut Definition senkrecht auf AB	2	
(IV)	$\overline{MM_c} \cong \overline{MM_c}$	trivial	1	
(V)	$\lvert MB\rvert > \lvert MM_c\rvert < \lvert MA\rvert$	(III), rechter Winkel ist der größte Winkel im Dreieck, Seiten-Winkel-Beziehungen im Dreieck	3	
(VI)	$\overline{AMM_c} \cong \overline{BMM_c}$	(I), (III), (IV), (V), SsW	5	
(VII)	$\delta_1 \cong \delta_2$	(VI)	1	
(VIII)	$\beta \cong \gamma_1$	(I), Basiswinkelsatz	2	
(IX)	$\lvert\delta_1\rvert = 2 \cdot \lvert\gamma_1\rvert$	(VIII), starker Außenwinkelsatz	2	
(X)	$\overline{MC} \cong \overline{MC}$	trivial	1	
(XI)	$\overline{AMC} \cong \overline{BMC}$	(X), (I), Mittelsenkrechtenkriterium ($\overline{AC} \cong \overline{BC}$), SSS	4	
(XII)	$\gamma_2 \cong \gamma_1$	(XI), Definition Dreieckskongruenz	2	
(XIII)	$\lvert\delta_2\rvert = 2 \cdot \lvert\gamma_1\rvert$	(VII), (IX)	2	
(XIV)	$\lvert\delta_2\rvert = 2 \cdot \lvert\gamma_2\rvert$	(XII), (XIII)	2	
(XV)	$\lvert\delta_1\rvert + \lvert\delta_2\rvert = 2 \cdot (\lvert\gamma_1\rvert + \lvert\gamma_2\rvert)$	(IX), (XIV)	2	
	Abschlussfrage: Welcher Satz wurde hier für einen Spezialfall bewiesen?	Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz	1	

Auswertung

Punkte	Note		Punkte	Note	erreichte Punkte	Note
87	1		43	4,5		
86	1		42	4,5		
85	1		41	4,5		
84	1		40	4,5		
83	1		39	4,5		
82	1		38	4,5		
81	1,5		37	4,5		
80	1,5		36	4,5		
79	1,5		35	4,5		
78	1,5		34	4,5		
77	1,5		33	4,5		
76	1,5		32	5		
75	1,5		31	5		
74	2		30	5		
73	2		29	5		
72	2		28	5		
71	2		27	5		
70	2		26	5		
69	2		25	5		
68	2,5		24	5		
67	2,5		23	5		
66	2,5		22	5		
65	2,5		21	5,5		
64	2,5		20	5,5		
63	2,5		19	5,5		
62	2,5		18	5,5		
61	3		17	5,5		
60	3		16	5,5		
59	3		15	5,5		
58	3		14	5,5		
57	3		13	5,5		
56	3		12	5,5		
55	3,5		11	5,5		
54	3,5		10	6		
53	3,5		9	6		
52	3,5		8	6		
51	3,5		7	6		
50	3,5		6	6		
49	4		5	6		
48	4		4	6		
47	4		3	6		
46	4		2	6		
45	4		1	6		
44	4		0	6		