Einführung in die Geometrie: Übungen zum Tutorium, Nr. 1

(Lösungen)

1. **Aufgabe:** Es sei A die Menge der geraden natürlichen Zahlen, B die Menge der natürlichen Zahlen, deren Quadrate gerade sind. Vergleichen Sie die Mengen.

   Lösung: A sei die Menge der geraden natürlichen Zahlen, also $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$. B sei die Menge aller natürlichen Zahlen, deren Quadrate gerade sind. Die Quadrate aller natürlichen geraden Zahlen liefern uns wieder gerade Zahlen. Die Quadrate ungerader natürlicher Zahlen hingegen sind ungerade. Daher gilt für die Menge B: $B = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Die Mengen A und B sind also identisch.

2. **Aufgabe:** Geben Sie eine andere Schreibweise der folgenden Mengen an und prüfen, Sie welche Mengen identisch sind.

   $M_1 = \{x|x \in \mathbb{N} \text{ und } x + 2 = 0\}$ $M_2 = \{x|x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 + 2 = 0\}$
   $M_3 = \{x|x \in \mathbb{Z} \text{ und } x + 2 = 0\}$ $M_4 = \{x|x \in \mathbb{Q} \text{ und } x^2 - 2 = 0\}$
   $M_5 = \{x|x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 - 2 = 0\}$ $M_6 = \{x|x \in \mathbb{R} \text{ und } (x + 2)^2 = 0\}$

   Lösung: Für die gegebenen Mengen ergeben sich folgende alternative Schreibweisen:

   $M_1 = \varnothing$ $M_2 = \varnothing$
   $M_3 = \{-2\}$ $M_4 = \varnothing$
   $M_5 = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ $M_6 = \{-2\}$

   Damit zeigt sich, dass die Mengen M_1, M_2 und M_4 identisch sind. Ebenso sind die Mengen M_3 und M_6 identisch.

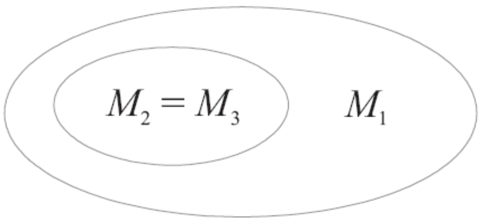
3. **Aufgabe:** Prüfen Sie, welche der folgenden Mengen identisch sind und welche Teilmengenbeziehungen bestehen. Stellen Sie die Teilmengenbeziehungen in einem Venn-Diagramm dar.

   M_1: Menge aller gleichschenkligen Dreiecke,

   M_2: Menge aller gleichseitigen Dreiecke,

   M_3: Menge aller gleichwinkligen Dreiecke.

   Lösung: $M_2 = M_3 \subset M_1$. Damit ergibt sich das folgende Venn-Diagramm.



4. **Aufgabe:** Prüfen Sie, welche der folgenden Mengen identisch sind und welche Teilmengenbeziehungen bestehen.

   N_1: Menge aller Vierecke mit vier kongruenten Winkeln,

   N_2: Menge aller Vierecke mit gleich langen, einander halbierenden Diagonalen,

   N_3: Menge aller Vierecke mit zwei Paaren paralleler Gegenseiten und einem rechten Winkel.

   Lösung: $N_1 = N_2 = N_3$. Durch alle drei Mengen wird die Menge aller Rechtecke beschrieben.

5. Aufgabe: Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen A und B die folgenden Aussagen gelten:

a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Zu a: zu zeigen sind zwei Richtungen:

1) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

Voraussetzung: $A \subset B$

Dann gilt für jedes $x \in A$ auch $x \in B$ und somit auch (nach Definition Durchschnitt zweier Mengen) $x \in A \cap B$, also ist $A \subset (A \cap B)$. Da umgekehrt $(A \cap B) \subset A$ immer gilt folgt daraus: $A \cap B = A$ und damit die Behauptung.

2) $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$

Voraussetzung: $A \cap B = A$

Dann gilt für jedes $x \in A$ auch $x \in A \cap B$, und somit $x \in B$, also $A \subset B$ und damit die Behauptung.

Zu b: zu zeigen sind zwei Richtungen:

1) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

Voraussetzung: $A \subset B$

Nach Definition „Vereinigungsmenge“ gilt: $B \subset (A \cup B)$. Für jedes $x \in A \cup B$ gilt $x \in A$ oder $x \in B$. Wegen der Voraussetzung $A \subset B$ folgt mit $x \in A$ auch $x \in B$, also folgt aus $x \in A \cup B$ auch stets $x \in B$ und damit $(A \cup B) \subset B$. Aus den beiden Teilmengenbeziehungen $B \subset (A \cup B)$ und $(A \cup B) \subset B$ folgt $A \cup B = B$ und damit die Behauptung.

2) $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$

Voraussetzung: $A \cup B = B$

Dann gilt für jedes $x \in A$ auch $x \in A \cup B = B$, und somit $x \in B$, also $A \subset B$ und damit die Behauptung.